

M. INTRILIGATOR

**MATHEMATICAL
OPTIMIZATION
AND
ECONOMIC THEORY**

PRENTICE-HALL, N.Y., 1971

М. ИНТРИЛИГАТОР

**Математические
методы
оптимизации
и экономическая
теория**

Перевод с английского
под редакцией
и с предисловием
А. А. КОНЮСА

Издательство «Прогресс»
Москва 1975

Переводчики:

Т. И. Жукова (главы 2, 7—10)
и Ф. Я. Кельман (главы 1, 3—6, 11—16 и приложения).

Книга представляет собой руководство по теории математического программирования и ее экономическому применению. В ней последовательно излагаются постановка общей задачи математического программирования, классические методы оптимизации, линейное и нелинейное программирование, теория игр и т. д.

Рассматриваются проблемы, связанные с применением математического аппарата статистической оптимизации в теории потребления, теории производства и т. д.

Книга будет полезна всем тем, кто занимается вопросами применения экономико-математических методов в народном хозяйстве.

Редакция литературы по экономике

© Перевод на русский язык «Прогресс», 1975

И 10803—178
006 (01)—75 27—75

1. О МАТЕМАТИЧЕСКОМ СОДЕРЖАНИИ КНИГИ М. ИНТРИЛИГАТОРА¹

Многие практические задачи хозяйственной деятельности и ряд важных вопросов экономической теории связаны с задачами определения наилучшего, оптимального варианта решения. Таковы, например, задачи выбора оптимальной производственной программы предприятия, транспортные задачи рационального распределения грузопотоков или целый комплекс проблем, связанных с оптимальным планированием народного хозяйства. Для решения задач такого рода в математической науке созданы и интенсивно разрабатываются в настоящее время новые математические методы, объединяемые под общим названием методов математического программирования.

Со времени открытия Ньютоном и Лейбницем дифференциального и интегрального исчисления аппарат прикладной математики создавался в основном под влиянием запросов естественных наук (в первую очередь физики) и техники. Однако для конкретного численного решения типичных задач, возникающих в экономике, этот аппарат оказывается недостаточным. Например, многие хозяйственные проблемы, представленные в математической форме, состоят в отыскании экстремума, т. е. максимума или минимума, линейной функции нескольких переменных при наличии линейных ограничений. Классический математический анализ не содержит алгоритмов для решения задач этого типа. Независимое друг от друга создание советским математиком Л. В. Канторовичем и Д. Данцигом в США специальных методов решения этих задач — линейного программирования — явилось нача-

¹ Данный раздел предисловия написан Ф. Я. Кельманом.

лом широких исследований и в области решения многих других видов экстремальных задач. Экономические проблемы оказали существенное влияние и на разработку такой математической дисциплины, как теория игр.

В настоящее время существует огромное количество работ, посвященных различным сторонам теории математического программирования: прикладным аспектам, методам численного решения и таким элементам, которые по традиции относятся к области «чистой математики». Сейчас создается широко разветвленная теория оптимизации. Изучение методов математического программирования, особенно линейного программирования, становится необходимым для практической работы экономиста. Это отражается и в расширении математической подготовки студентов экономических вузов. Без понимания основных идей и результатов применения теории математического программирования невозможно разобратся в существе большинства важных экономико-математических моделей и основанных на них практических предложений.

Само название книги М. Интрилигатора «Математические методы оптимизации и экономическая теория» как бы разделяет ее на две части. В первой отражается стремление автора дать читателю развернутое, четкое и логически связанное представление о современном состоянии теории решения экстремальных задач. Вторая часть названия показывает, что автор ориентируется в основном на читателя, работающего в сфере экономики или готовящегося к такой работе. Требования к читателю, в общем, не выходят за пределы стандартной вузовской программы по математическому анализу и линейной алгебре. Ряд сведений может быть почерпнут либо непосредственно при чтении книги, либо из имеющихся в ней специальных математических приложений. Книга может служить в качестве учебного пособия по методам оптимизации и по математическим моделям экономики для студентов и аспирантов широкого круга специальностей. Как работа обзорного характера она будет полезной и для специалистов, занимающихся исследованием операций.

Данная книга не дает исчерпывающего изложения современного состояния какой-либо отдельной математической дисциплины, например линейного программирования, теории игр или вариационного исчисления. Ее цель — показать в систематизированной форме основные направ-

ления математической теории оптимизации в их взаимосвязи. Эта цель определяет и отбор материала, и способ его изложения.

Автор начинает с постановки в гл. 2 общей задачи математического программирования, излагает известные классические методы отыскания экстремумов дифференцируемых функций, а затем в гл. 4 переходит к нелинейному программированию. Линейное программирование рассматривается как частный случай общей задачи нелинейного программирования, и основные теоремы линейного программирования доказываются с помощью теоремы Куна — Таккера, приведенной в главе о нелинейном программировании. Усвоение материала облегчается последовательным применением множителей Лагранжа и их содержательной интерпретацией. Книга содержит много иллюстративного материала в виде различных рисунков и таблиц. Например, в таблице на рис. 5.3 в наглядной форме показана связь между двойственными задачами линейного программирования. В изложении теории игр, данном в гл. 6, используется принцип аналогии с задачами линейного программирования. Так, один из центральных результатов теории игр — теорема о минимаксе — доказывается с помощью теоремы двойственности.

Теория оптимизации, рассмотренная в части II книги, является непосредственной математической базой для постановки и исследования ряда практических и теоретических вопросов экономической науки. В части III излагаются именно такие вопросы экономической теории, которые допускают постановку оптимизационных задач. Ценность этого раздела книги состоит прежде всего в описании того, как формальный математический аппарат может применяться для анализа экономических процессов. Экономические приложения теории оптимизации автор называет задачами рационального ведения хозяйства (economizing). Такая терминология помогает связать воедино достаточно разнородные вопросы, включенные в книгу.

Особенностью книги М. Интрилигатора является то, что это, по-видимому, первое руководство по экономико-математическим проблемам, в котором наряду с методами математического программирования излагается также и математическая теория оптимального управления. Эти вопросы излагаются в части IV, названной «Динамическая оптимизация». Придерживаясь хотя и принятой,

но довольно условной классификации задач оптимизации на статические и динамические, автор относит последние к задачам управления. Если терминология ряда математических дисциплин, таких, как, например, математический анализ или линейное программирование, сейчас знакома широкому кругу экономистов, то смысл, в котором в настоящей книге употребляются понятия «управление» или «задача управления», нуждается в некоторых пояснениях.

В течение примерно двух последних десятилетий сформировалась новая прикладная математическая дисциплина, известная под названием теории оптимального управления, или математической теории оптимальных процессов. Развитие этой дисциплины было вызвано потребностями одной из важнейших областей технических наук — теории автоматического регулирования. В самой общей постановке проблема регулирования (управления) автоматическими устройствами сводится к выбору значений во времени некоторых величин, называемых управляющими параметрами, подчиненных ряду ограничений, при которых достигается экстремум некоторого функционала. Этот функционал в математической форме характеризует цель управления. Определение экстремума такого функционала в математической теории оптимального управления и называют задачей управления.

Математический аппарат современной теории оптимального управления включает методы вариационного исчисления, метод принципа максимума и методы динамического программирования.

Классические методы вариационного исчисления, разрабатывавшиеся с XVIII столетия, не всегда применимы к задачам теории автоматического управления. Для решения этих задач и были созданы новые методы — принцип максимума и динамическое программирование¹. (За разработку принципа максимума группа советских математиков во главе с академиком Л. С. Понтрягиным была удостоена Ленинской премии 1962 г.)

Динамическое программирование уже нашло немало интересных приложений и при решении практических экономических задач, например при создании моделей

¹ Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, М., «Наука», 1969; Р. Беллман, Динамическое программирование, перев. с англ., М., ИЛ, 1960.

календарного планирования производства. Что касается вариационного исчисления и принципа максимума, то знакомство с этими разделами теории оптимизации будет полезным для экономиста-теоретика и с познавательной точки зрения, и в свете их возможных приложений к вопросам оптимального планирования и управления в народном хозяйстве.

В западной экономической литературе последних лет имеются примеры применения этих математических методов к исследованию проблем экономического роста (см., например, библиографию к гл. 16 данной книги). На русский язык переведены монографии, в которых затрагиваются указанные вопросы¹. Использование принципа максимума для анализа модели оптимального экономического роста проведено М. Интрилигатором весьма обстоятельно. Отметим здесь, что проблема экономического роста в той форме, как она изложена в книге М. Интрилигатора, недостаточно освещена в советской и переводной экономико-математической литературе. Автор рассматривает оптимальный экономический рост в так называемой «неоклассической» модели роста, в которой предусматривается взаимозамещаемость труда и капитала. Эта модель предложена американским экономистом Р. Солоу в 1956 г. В экономико-математической литературе на русском языке значительно подробнее представлены модели экономического роста, восходящие к модели расширяющейся экономики Д. фон Неймана и к динамической модели «затраты — выпуск» В. Леонтьева.

Книга М. Интрилигатора имеет ряд общих черт с переведенной на русский язык книгой К. Ланкастера «Математическая экономика». В книге Ланкастера также рассматриваются вопросы теории оптимизации и ее приложения к моделям экономики, а математический уровень изложения в обеих книгах примерно одинаков. В то же время книга Интрилигатора отличается иной последовательностью изложения разделов теории математического программирования и в нее включен материал, который в работе Ланкастера либо совершенно не рассматривается, либо затронут лишь вскользь. Это теория игр, методы решения задач управления (вариационное исчисление,

¹ См., например, Я. Тинбэрхэн, Х. Бос, Математические модели экономического роста, М., «Прогресс», 1967; Л. Столеру, Равновесие и экономический рост, М., «Статистика», 1974

динамическое программирование и принцип максимума) и такие разделы экономической теории, как теория экономического благосостояния, исследование проблем экономического роста с учетом замещаемости капитала и труда, а также проблема кривых безразличия в потреблении. В целом эти две книги хорошо дополняют друг друга.

К недостаткам математической части книги Интрилигатора относится несколько поверхностное описание алгоритмов решения задач математического программирования. Хотя автор стремился к математически строгой трактовке рассматриваемых проблем, однако этот принцип не всегда выдерживается для того, чтобы сделать изложение более понятным для читателя. Часто автор ограничивается формулировкой теоремы и ее разъяснением или дает упрощенную схему доказательства.

2. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАЗДЕЛОВ КНИГИ

Экономическим проблемам в книге М. Интрилигатора уделено меньше места, чем математическим. Тем не менее в ней дано полное изложение в математической форме современной политической экономии в том виде, как она преподается в высших учебных заведениях капиталистических стран. Нет ничего удивительного, что эта политическая экономия имеет явно апологетическую направленность. Иначе быть не может. Обоснование неизбежности такой апологетики известный американский экономист Мартин Бронфенбреннер видит в старом латинском изречении «*cuius regio, eius religio*», т. е. «какая страна, такая и религия»¹. Действительно, в капиталистической стране вряд ли потребуют от студентов знания основ марксизма-ленинизма, например того известного положения, что «*историческую тенденцию капиталистического накопления*» Маркс характеризует в следующих знаменитых словах: «...Централизация средств производства и обобществление труда достигают такого пункта, когда они становятся несовместимыми с их капиталистической оболочкой. Она взрывается. Бьет час капиталистической частной собственности. Экспроприаторов экспроприируют»

¹ M. Bronfenbrenner, Notes on Marxian Economics in the United States, *The American Review*. Vol. LIV, № 6, December 1964.

(«Капитал», I)¹. Эту тему в учебниках политической экономии капиталистических стран, естественно, не обсуждают.

Обобществление средств производства неизбежно. Теория, которая этой проблеме не уделяет должного внимания, не может быть полноценной. Такой единой немарксистской экономической теории и не существует. «Экономическая теория», представленная в книге М. Интрилигатора, состоит по крайней мере из двух различных построений: во-первых, из работ Вальраса — Эрроу — Дебре и, во-вторых, из теоретических взглядов Джона фон Неймана. Они между собой никак не связаны, и ни одно из них не исчерпывает предмета экономики. При этом первое построение, наиболее модное и в книге М. Интрилигатора принимаемое за основное, явно несовершенно, так как оно не отражает внутреннюю логику развития капиталистического производства.

Капиталистическая апологетика в математической экономике проявляется в нежелании анализировать весь горизонт экономической действительности и делать соответствующие выводы из достигнутых математическим путем результатов.

Возникшая с целью отрицания трудовой теории стоимости математическая экономия в первую очередь сосредоточила внимание на так называемой микроэкономике, т. е. на теории потребительского бюджета («домашнего хозяйства») и теории предприятия («фирмы»). В учении о народном хозяйстве эти темы являются вспомогательными и ими ни Адам Смит и Рикардо, ни Маркс не занимались. «Классиками» для буржуазных экономистов стали швейцарец Леон Вальрас (1834 — 1910) и американец Джон Бейтс Кларк (1847 — 1938). Упоминают также Маршалла и Смита, но последнего — по недоразумению.

Вальрас — один из первых авторов теории «предельной полезности». Апологетика этой теории заключается в иллюзорном представлении о том, что цены товаров определяются предельными полезностями, т. е. «полезностью» товаров в сочетании с их «редкостью» (ограниченным количеством). Это верно лишь по отношению к таким товарам, как уникальные произведения искусства, погашенные почтовые марки и т. п. (они служат средством

¹ В. И. Ленин, Полн. собр. соч., т. 26, стр. 67.

накопления). Цены же товаров, производимых и потребляемых (входящих в бюджет рабочей семьи), зависят от условий производства. И именно эти цены определяют собой предельные полезности. Например, при высокой цене молока его покупают только детям (высокая предельная полезность); при низкой цене молока готовится молочная лапша для всей семьи, причем иногда находится такой член семьи, который склонен отдавать свою лапшу собаке (низкая предельная полезность молока).

Вальраса считают также основателем статической модели «экономического равновесия», связанной своими корнями с теорией предельной полезности, так как природные ресурсы предполагаются ограниченными.

Другой основоположник математической экономики, Дж. Б. Кларк, показал себя апологетом капиталистического строя непосредственно и в явной форме. Во введении к своему главному труду он прямо заявил:

«Над обществом тяготеет обвинение в том, что оно «эксплуатирует труд». «Рабочих, как говорят, регулярно грабят, лишая их того, что они производят». ...Если бы это обвинение было доказано, всякий здравомыслящий человек стал бы социалистом, и его стремление переделать систему производства было бы мерилом и выражением его чувства справедливости. Если мы намерены, однако, проверить это обвинение, мы должны вступить в сферу производства. Мы должны разложить продукт общественного производства на его составные части — для того, чтобы увидеть, способен ли естественный эффект конкуренции дать каждому производителю ту долю богатства, которую именно он производит»¹.

В своей попытке оправдать капиталистическую систему Кларк разработал теорию «предельной производительности», изложенную у М. Интрилигатора в главе «Теория фирмы». В дальнейшем будет показано, что достигнуть своей цели ему не удалось.

В результате сочетания теорий Вальраса и Кларка возник «неоклассический подход» в современной математической экономике, так подробно изложенный в книге М. Интрилигатора².

¹ Дж. Б. Кларк, Распределение богатства, перев. с англ., М., ОГИЗ, 1934, стр. 41.

² Эбергардт Фелльс называет неоклассические представления «эклетицистскими» (Е. М. Fells, *Gesellschaftlich notwendige*

3. МИКРОЭКОНОМИКА: ПОТРЕБИТЕЛЬСКИЙ БЮДЖЕТ И ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Математический аппарат, разработанный применительно к проблемам микроэкономики, получил в настоящее время всеобщее признание. Без таких концепций математической экономики, как производственные функции, предельные значения, экстремумы — максимальные и минимальные значения — и другие, невозможно успешно построить экономико-математические модели, имеющие своим назначением служить вспомогательным орудием народнохозяйственного планирования.

Но решение некоторых отдельных вопросов применения математических методов в микроэкономике нуждается в существенной корректировке с экономической точки зрения. Это относится, в частности, к теории личного потребления. Основное понятие в ней — «функция полезности» — конструируется в книге М. Интрилигатора на основе нескольких математических аксиом. В дальнейшем эта функция получила различные экономические толкования. Наиболее важная область ее применения относится к совокупностям товаров, входящим в потребительский бюджет. И здесь целесообразно вместо «полезности» принять более определенный термин «уровень потребления». Это будет сравнительная характеристика с точки зрения потребителя удовлетворения его потребностей в результате фактического потребления той или иной совокупности товаров, составляющих его бюджет.

В такой постановке вопроса о «функции полезности» вызывает решительные возражения аксиома «ненасыщения» (стр. 203), играющая у М. Интрилигатора немаловажную роль в «экономике благосостояния» (стр. 353). «Ненасыщение» означает не что иное, как включение в расходную часть потребительского бюджета накопления (сбережения) в товарной или денежной форме. Но нет достаточных оснований для того, чтобы сбережения, предназначенные для обеспечения желательного уровня жизни в будущем, рассматривать наравне с расходами на продукты питания, развлечения и т. п., производимыми для поддержания уровня потребления в данном, текущем периоде.

Arbeit, *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, Vol. 184, September 1970).

Дж. фон Нейман и О. Моргенштерн, чьи попытки измерения полезности рассматриваются М. Интрилигатором в разделе 7.6, полностью отдавали себе в этом отчет:

«... В рамках наших непосредственных целей было бы излишним усложнением запутываться в задачах предпочтения между событиями в различные периоды будущего. Известно, что это дает интересные, хотя до сих пор и чрезвычайно темные, связи с теорией сбережений и процента»¹.

Реальной экономической величиной, которую следует рассматривать в потребительском бюджете в данном промежутке времени, является общий расход семьи, определяемый как количество фактически потребленных товаров и услуг, умноженных на их цены. Расходы на товары длительного пользования должны включаться в бюджет потребителя по ценам их проката (на жилище — по квартирной плате), причем именно эти цены, как отмечал Энгельс, следует сопоставлять со стоимостями².

Применение математического анализа в теории личного потребления имеет в условиях социалистического хозяйства практическое значение, так как он может служить основой для успешного прогнозирования платежеспособного спроса населения.

Но непосредственное оперирование неизвестными и, возможно, непознаваемыми «функциями полезности» не дает приемлемых результатов. При конструировании «функций полезности» высказываются обычно такие соображения, которые имеют всегда в той или иной степени произвольный характер.

Между тем точные результаты получаются при анализе особого состояния бюджета потребителя, когда, несмотря на изменения структуры потребляемых товаров (вследствие изменения соотношений между ценами), остается неизменным его общий «уровень потребления». Математически это состояние для случая двух товаров характеризуется уравнением кривой безразличия $U(x_1, x_2) = \text{const}$, приведенным на стр. 209.

Эффективность применения концепции постоянного уровня потребления в теории личного потребления обу-

словливается тем, что эта концепция является существенным элементом экономических расчетов. В разных странах вычисляются специальные индексы цен, позволяющие судить о том, сохраняется ли у лиц, живущих на заработную плату, постоянным их уровень потребления.

При вычислении индексов цен сопоставляются два периода времени одинаковой продолжительности: «базисный период» (закрепленный во времени) и «текущий период» (изменяющийся с течением времени). Какой из этих периодов предшествует другому — значения не имеет. В индексных расчетах пользуются специальными единицами измерения. За единицу счета каждого товара принимается то его количество, которое можно приобрести в базисном периоде на одну денежную единицу. В таком случае величины $p_1, p_2, \dots, p_n$ в гл. 7 книги М. Интрилигатора являются отношениями цен в текущем периоде к ценам в базисном периоде, причем каждая из цен в базисном периоде в этом «индексном» измерении будет равна единице. Очевидно, что величины $x_1, x_2, \dots, x_n$ будут количествами потребленных товаров в текущем периоде в обычных единицах счета, умноженными на обычные цены базисного периода.

Рассматривается заданная гиперповерхность безразличия

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{const}.$$

В «косвенном» выражении (см. задачу 7-P) ее уравнение имеет вид

$$U^*(p_1, p_2, \dots, p_n, I) = \text{const}.$$

Если обозначить через $\tilde{I}$ общий расход потребителя в базисном периоде, обеспечивающий заданный постоянный уровень потребления при ценах $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1$, то последнему равенству можно будет придать следующий вид:

$$U^*(1, 1, \dots, 1, \tilde{I}) = \text{const}.$$

Отсюда путем соответствующего выбора значения константы можно получить

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = \tilde{I}, \text{ где } \tilde{I} = \text{const}.$$

¹ Дж. фон Нейман и О. Моргенштерн, Теория игр и экономическое поведение, перев. с англ., М., «Наука», 1969, стр. 45.

² К. Маркс и Ф. Энгельс, Соч., т. 18, стр. 266.

Уравнения (7.3.13) М. Интрилигатора позволяют установить следующее равенство:

$$\sum \frac{\partial U}{\partial x_j} x_j = I \cdot y.$$

В рассматриваемой проблеме естественно предполагать, что при постоянном уровне потребления и при постоянном общем расходе («доходе») потребитель множитель Лагранжа y , определяемый равенством (7.3.18), должен быть также постоянным. Поэтому, полагая $y = 1$,

$$\sum \frac{\partial U}{\partial x_j} x_j = \tilde{I}. \quad (U = \text{const})$$

Это уравнение действительно также при всяких значениях I и y , удовлетворяющих равенству $I \cdot y = \tilde{I}$. Его однородность первой степени означает просто, что при выбранных «индексных» единицах измерения товаров значения количеств потребленных товаров $x_1, x_2, \dots, x_n$, так же как и значения общего расхода потребителя в базисном периоде $\tilde{I}$, зависят от единицы измерения денег.

Полученное дифференциальное уравнение представляет собой условие совершенной формы гиперповерхности постоянного уровня потребления. Какая-либо функция, $\Psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которая не удовлетворяет этому условию, не может быть принята в качестве «функции полезности». Действительно, если при $\Psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{const}$ и в то же время при общем расходе $I = \text{const}$ множитель Лагранжа y при покупке различных наборов товаров по соответствующим ценам не будет одинаковым, то различные точки на гиперповерхности постоянного уровня потребления не будут «безразличны» для потребителя.

Отсюда нетрудно заключить, что приводимые М. Интрилигатором в табл. 7.1 «примеры функций полезности», хотя они и соответствуют перечисленным им математическим аксиомам, экономически несостоятельны, так как они не удовлетворяют приведенному условию¹.

Если исследованием личного потребления советские экономисты-математики стали усиленно заниматься лишь в самое последнее время, то по другому разделу микро-

экономики — производственным функциям — у нас имеется уже обширная литература.

В книге М. Интрилигатора производственные функции рассматриваются в гл. 8 «Теория фирмы». Как всегда, во всех работах по математической экономике производственные функции сначала трактуются с позиций технологии, т. е. с перечисления видов производственного оборудования, сырья, материалов и рабочей силы (по квалификации), которые необходимы для выпуска данного вида продукции. Однако при таком дробном подходе возникает сомнение в правильности принимаемого предположения о дифференцируемости производственных функций. Поэтому целесообразно оперировать лишь такими производственными функциями, в которых аргументами служат крупные экономические агрегаты: труд, капитал, земля (природные ресурсы). В литературе уже отмечалась недостаточная обоснованность технологического подхода к производственным функциям: «Технологи не принимают на себя ответственности за производственную функцию... Они рассматривают производственную функцию в качестве концепции экономистов, и, как показывает история, почти все производственные функции, которые были до настоящего времени получены, являются делом экономистов, а не инженеров»¹.

Термина «производственная функция» в работах классиков марксизма-ленинизма нет. Но необходимо сказать, что это понятие именно в экономическом смысле содержится в трудовой теории стоимости. В гл. VIII третьего тома «Капитала» Маркс пишет: «Требуется определенная масса рабочей силы, представленная определенным числом рабочих, чтобы произвести определенную массу продукта, например, в течение одного дня, и, следовательно, — что уже при этом само собой разумеется, — привести в движение, потребить² производительно определенную массу средств производства, машин, сырья и т. д.»².

Если массу рабочей силы обозначить через x_1 , массу средств производства через x_2 и массу продукта через q , то при помощи простейшей формулы производственной функции Кобба — Дугласа это высказывание Маркса

¹ R. Dorfman, P. Samuelson, R. Solow, Linear Programming and Economic Analysis, McGraw Hill, 1958, p. 181.

² К. Маркс и Ф. Энгельс, Соч., т. 25, ч. 1, стр. 157.

¹ См. сб. «Экономико-математические методы в зарубежной статистике», М., «Статистика», 1974, стр. 186–208.

представляется в виде, приведенном в табл. 8.1 книги М. Интрилигатора:

$$q = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2},$$

где b_0 , b_1 , b_2 — постоянные, а $b_1 + b_2 = 1$.

Далее Маркс развивает свою мысль:

«Определенное число рабочих приходится на определенное количество средств производства, следовательно, определенное количество живого труда приходится на определенное количество труда, уже овеществленного в средствах производства...

Это отношение образует техническое строение капитала...»¹

Деление обеих частей производственной функции Кобба — Дугласа на x_1 дает

$$\frac{q}{x_1} = b_0 \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{1-b_1}.$$

В правой части этого равенства находится выражение, зависящее от технического строения капитала, предусмотренного Марксом, а в левой части — производительность труда.

Важное познавательное значение производственных функций заключается в том, что они позволяют устанавливать оптимальные соотношения между факторами производства при данных соотношениях между «ценами» этих факторов. «Ценами» в этой задаче М. Интрилигатор правильно называет «оплаты» факторов: заработную плату, арендную плату за основные фонды, арендную плату за землю. Эти величины в совокупности образуют авансированный капитал; вместе с тем они входят в цену товара.

Предполагая, что предприниматель стремится максимизировать прибыль, М. Интрилигатор приходит к уравнениям (8.2.11), которые означают, в частности, что заработная плата равняется предельному продукту, создаваемому рабочей силой.

Именно в этих уравнениях (8.2.11) создатель теории предельной производительности Дж. Б. Кларк видит следующее оправдание капиталистического способа производства: заработная плата не зависит от желаний рабочих и предпринимателей, участвующих в производстве, а определяется исключительно технологическими свойствами производственных функций.

¹ К. Маркс и Ф. Энгельс, Соч. т. 25., ч. I, стр. 157—158.

Между тем известно, что в капиталистическом обществе заработная плата рабочего и продолжительность рабочего дня устанавливаются в результате непрестанной классовой экономической борьбы. Это хорошо знает и М. Интрилигатор. В его «нормативных правилах» для профессионального союза рекомендуется: «Угрожайте проведением забастовок; время от времени бастуйте, чтобы сделать угрозу реальной» (табл. 1.3).

Нежелание разобраться в этом противоречии между математической теорией и экономической практикой вообще характерно для буржуазной математической экономики. Оно связано с нарочитым пренебрежением к столь важному экономическому показателю, как продолжительность рабочего дня. Это более ста лет тому назад констатировал Маркс в письме к Энгельсу: «Пока определение стоимости рабочим временем, как даже у самого Рикардо, остается «неопределенным», оно не пугает этих людей. Но как только указана точная связь с рабочим днем и его изменениями, дело выступает перед ними в новом, весьма неприятном свете»¹.

Сущность противоречия между производственными функциями и экономической действительностью заключается в следующем. В производственных функциях затраты рабочей силы должны быть выражены в часах труда. Соответственно оплата рабочей силы будет характеризоваться часовой заработной платой.

В соответствии с концепцией предельного продукта рабочей силы в производственных функциях его величина зависит от размеров применяемой рабочей силы. При прочих равных условиях предельный продукт тем больше, чем меньше рабочей силы применяется в производстве. А размеры предложения рабочей силы (в часах) зависят от продолжительности рабочего дня. Поэтому продолжительность рабочего дня и ставка дневной заработной платы и являются постоянно предметом спора между предпринимателями и рабочими. При анализе производственных функций это необходимо постоянно иметь в виду.

4. «ОБЩЕЕ РАВНОВЕСИЕ» ПО ВАЛЬРАСУ

В книге М. Интрилигатора, помимо естественного для буржуазного ученого отказа от углубленного анализа

¹ К. Маркс и Ф. Энгельс, Соч., т. 32, стр. 8.

производственных функций, имеется еще два раздела, посвященных «равновесию», по Вальрасу — Дебре и по фон Нейману, где автор также уклоняется от окончательного решения поставленной проблемы. Ошибка или прекращение дальнейших попыток экономико-математического исследования у буржуазных экономистов-математиков всегда связаны с игнорированием основного экономического закона капиталистической системы хозяйства — нормы прибавочной стоимости. Поэтому необходимо в развернутом виде показать экономическое содержание этого закона и его математическое выражение.

Простое и точное истолкование нормы прибавочной стоимости m' получаем в следующей ее форме:

$$m' = \frac{\gamma}{\omega} - 1,$$

где γ — продолжительность рабочего года (дня) в часах и ω — число часов труда в товарах, на которые расходуется вся полученная рабочим годовая (дневная) заработная плата. Труд различной квалификации предполагается редуцированным (приравненным) к простому труду. Редукция труда и определение полных затрат труда ω осуществляются при помощи таблицы затрат — выпуска В. Леонтьева (межотраслевого баланса)¹.

Исключительно важное значение нормы прибавочной стоимости m' в политической экономии состоит в том, что она одинакова во всех отраслях производства при предположении свободного перехода рабочих из одной отрасли в другую и при одинаковой структуре потребностей рабочих в разных отраслях.

Вместе с тем m' совпадает с нормой прибавочной стоимости в ценностном выражении. Именно та же самая величина m' получится после подстановки в числитель суммы цен всех произведенных в стране товаров личного потребления, а в знаменателе — суммы всей заработной платы, выплаченной в производстве этих товаров и соответствующих средств производства.

Пусть количество товаров (набор товаров), потребленных одной рабочей семьей в год, составляет $x_1, x_2, \dots, x_n$, а цены этих товаров равны $p_1, p_2, \dots, p_n$. Денежная стоимость одного набора составит, следовательно, $\sum p_j x_j$.

¹ А. А. Коныс, Редукция труда методом межотраслевого баланса, *Экономика и математические методы*, 1971, № 6.

Пусть денежная стоимость, или сумма цен всех произведенных наборов товаров, будет равна Γ , а сумма всей выплаченной заработной платы, или денежная стоимость товаров, потребленных рабочими на всех стадиях производства, составит Φ . Количество произведенных наборов будет, следовательно, равно $\frac{\Gamma}{\sum p_j x_j}$, а число занятых

рабочих на всех стадиях производства будет равно $\frac{\Phi}{\sum p_j x_j}$. Количество труда, заключенное во всех произведенных наборах предметов потребления рабочих, должно быть равно, с одной стороны, $\frac{\Gamma}{\sum p_j x_j} \cdot \omega$ (количество наборов, умноженное на число часов труда, заключенное в одном наборе), а с другой стороны, $\frac{\Phi}{\sum p_j x_j} \cdot \gamma$ (число

рабочих, умноженное на число часов труда, отработанных одним рабочим). Так как эти два выражения между собой равны, то отсюда следует:

$$\frac{\gamma}{\omega} = \frac{\Gamma}{\Phi}.$$

Это значит, что формула нормы прибавочной стоимости m' не только справедлива в отношении затрат труда, но также справедлива в ценностном выражении для совокупности отраслей, производящих предметы потребления рабочих и соответствующих средств производства.

Приведенное доказательство основано на соображениях, высказанных в начале этого века русским экономистом-математиком В. К. Дмитриевым по поводу теории Д. Рикардо¹. Разность $\Gamma - \Phi$, равная прибавочной стоимости, представляет собой денежную стоимость товаров, потребляемых рабочими, занятыми на предприятиях, вырабатывающих средства производства в процессе расширенного воспроизводства, и на предприятиях, вырабатывающих предметы потребления капиталистов, и вообще в непроизводственной сфере.

Говорить о равенстве нормы прибавочной стоимости в каждой отдельной отрасли производства в ценностном

¹ В. К. Дмитриев, *Экономические очерки*, М., 1904.

выражении можно только относительно отраслей, связанных между собой как по признаку производства, так и по признаку потребления. Например, во взаимосвязанном процессе получения зерна и соломы невозможно указать в отдельности, сколько труда затрачено на зерно и сколько — на солому. Только в отношении суммы цен зерна и соломы можно ставить вопрос о ее соответствии количеству затраченного труда. С другой стороны, соотношение цен товаров, удовлетворяющих одну и ту же потребность, устанавливается в соответствии с их потребительными свойствами. Лишь общая стоимость товаров, удовлетворяющих одну и ту же потребность, может сопоставляться с суммой их цен. Примером здесь могут служить цены на уголь и нефть. Эти товары удовлетворяют одну и ту же потребность в топливе (если отвлечься от других сфер их применения). Теплотворная способность тонны нефти в два раза выше теплотворной способности тонны угля, а количество труда, заключенного в тонне нефти, в два раза меньше количества труда, заключенного в тонне угля. Для того чтобы нефть не оказалась дефицитным товаром, цены угля и нефти устанавливаются в соответствии с их теплотворной способностью. В данном случае цены устанавливаются применительно к издержкам производства угля. Сумма же цен продуктов топливной промышленности соответствует их общей стоимости, причем нефть продается выше ее индивидуальной стоимости, а уголь — ниже его индивидуальной стоимости.

В свете трудовой теории стоимости народнохозяйственные явления находят исчерпывающее объяснение, тогда как формальными методами математической экономики им дается лишь поверхностное описание.

Последнее в особенности относится к «теории равновесия» Вальраса — Эрроу — Дебре, являющейся стержнем всей «экономической теории» М. Интрилигатора. Основной работой, на которую опирается М. Интрилигатор в гл. 9 «Общее равновесие» и гл. 10 «Экономика благосостояния», является книга Жерара Дебре «Теория ценности. Аксиоматический анализ экономического равновесия». «Ценностью» Дебре, пренебрегая традиционным различием цены и ценности (стоимости), называет скалярный вектор количеств товаров и цен, т. е. просто сумму цен. М. Интрилигатор дал весьма обстоятельное матема-

тическое изложение этой теории¹. По существу же, рассматривается равновесие, представляющее собой расширенную модель того механизма, какой наблюдается, например, на рынке, только перечень заданных факторов здесь значительно расширен: рассматриваются не только функции полезности и запасы товаров, но и производственные функции, природные ресурсы и т. д. Однако все построение представляет собой лишь поверхностное описание, а не глубокий анализ экономических закономерностей. На это обратили внимание, в частности, авторы руководства по линейному программированию и экономическому анализу: «Спрашивается, зачем нужна вся эта суета с существованием решения в вальрасовских уравнениях равновесия? Разве не ясно, что реальный экономический мир существует в действительности, функционирует»². Ответ авторов на поставленный ими вопрос сводится к тому, что анализ данной модели помогает развитию науки.

Если подойти к материалу, изложенному в гл. 9 и 10 книги М. Интрилигатора, с марксистской точки зрения, в нем можно будет найти утверждения, естественные выводы из которых автор либо не замечает, либо искажает. Например, так называемая «оптимальность по Парето» является основой концепции «экономики благосостояния» и подробно комментируется М. Интрилигатором в гл. 10. Из нее нетрудно вывести утверждение о том, что при прочих равных условиях нельзя увеличить доход предпринимателей без того, чтобы заработная плата рабочих не уменьшилась.

Дальнейшему анализу в этом направлении помогает заключительная диаграмма на рис. 10.8 гл. 10 (несомненным достоинством книги М. Интрилигатора являются многочисленные диаграммы, где автор демонстрирует простейшие, даже гипотетические, случаи экономических взаимозависимостей). На этой диаграмме изображена сделка между «производителем» и «потребителем», как деликатно называет контрагентов автор. В действительности же дело идет о предпринимателе и о рабочем. «Производитель» владеет товаром 2 «пицца»; «потребитель» владеет товаром 1, о котором М. Интрилигатор говорит: «Напри-

¹ См. К. К. Вальтух, Теорема Эрроу — Дебре о конкурентном равновесии и проблемы экономической теории, «Проблемы народнохозяйственного оптимума», Новосибирск, «Наука», 1973.

² R. Dorfman a. o., op. cit., p. 250.

мер, рабочая сила». Здесь только и может быть рабочая сила, потому что этот товар (в часах работы) откладывается по отрицательному направлению оси абсцисс, означающему «неудовольствие».

На диаграмме проведена граница «множества производственных возможностей» и три «кривых безразличия», характеризующих в данном случае не постоянный «уровень потребления», а, скорее, «постоянный уровень жизни», так как потребитель сопоставляет здесь объем своего потребления с количеством затрачиваемого им труда, т. е. с продолжительностью рабочего дня. Мы будем отмечать эти кривые безразличия порядковыми номерами 1, 2, 3 снизу.

В толковании своей диаграммы М. Интрилигатор представляет элементарное, даже не совсем понятное заблуждение. Он говорит, что предприниматель, «двигаясь» по границе множества производственных возможностей, достигает максимального уровня прибыли в точке y^* . Но так как эта точка совпадает на диаграмме с точкой потребления рабочего c^* на второй кривой безразличия, то прибыль здесь, следовательно, равна нулю. Диаграмма, составленная М. Интрилигатором, характеризует своего рода «робинзонаду», или натуральное хозяйство на данном участке земли. Производитель и потребитель совмещены в одном лице, и «теорема о разделяющей гиперплоскости» позволяет установить для точки c^* ($=y^*$), какое бесконечно малое удлинение продолжительности рабочего дня вызовет приращение производства и потребления пищи.

Для того случая, который, по-видимому, хотел и должен был изобразить М. Интрилигатор — предприниматель и рабочий являются двумя разными лицами, — диаграмма на рис. 10.8 должна быть истолкована следующим образом.

Кривая безразличия (№ 2), проходящая через точку c^* ($=y^*$), для предпринимателя неприемлема, и он прекратил бы производство, так как он должен был бы все произведенные продукты питания отдать рабочему. К счастью, автор предусмотрел кривую безразличия с более низким уровнем жизни — первую снизу. Ориентируясь на эту кривую безразличия (№ 1 снизу), т. е. полагая, что рабочий будет вынужден с ней согласиться, предприниматель выбирает на границе производственных возможностей такую точку, расстояние от которой до кривой

безразличия № 1 по оси ординат (на которой откладываются производимые и потребляемые продукты питания), будет максимальным. Возможно, что эта точка совпадает с y^* . Соответствующий отрезок представит собой «прибыль» предпринимателя, а точнее — созданный в данном производстве прибавочный продукт (собственно говоря, земельную ренту). Соответственно необходимый продукт (заработная плата рабочего в натуре) будет равен расстоянию между найденной точкой на кривой безразличия № 1 и осью абсцисс.

Отношение отрезка над кривой безразличия № 1 до границы производственных возможностей к отрезку под кривой безразличия до оси абсцисс представит норму прибавочной стоимости m' , как она показана в приведенной выше формуле в трудовом и ценностном выражении. Дело в том, что прибавочный и необходимый продукты в данном случае выражены в одной и той же натуральной единице измерения с одной и той же ценой и с одними и теми же затратами труда на единицу продукции.

Судя по примечанию к рис. 10.8, автора больше интересовала математическая сторона дела, а не экономическая. В связи с этим уместно вспомнить слова, принадлежащие, как утверждают, выдающемуся немецкому физику Макс-у Планку, о том, что «он начинал свою деятельность как экономист, но затем оставил эту профессию, потому что она слишком трудна»¹.

Главный порок теории Вальраса — Эрроу — Дебре, составляющей основу «экономической теории» М. Интрилигатора, заключается в отказе от так называемой гипотезы Адама Смита о тенденции (при совершенной конкуренции) процента на вложенный в производство капитал к выравниванию в разных отраслях народного хозяйства.

В разделе 10.4 «Оптимальность и фактор времени» (стр. 349) автор вводит понятие нормы процента на капитал, систематически различающийся по отдельным товарам. Экономисту трудно согласиться с таким представлением о «теории» капиталистического хозяйства.

Начало этому модному, но далеко не всеми буржуазными экономистами разделяемому направлению положил Альфред Маршалл. Его в особенности поддерживают

¹ П. Самуэльсон, Экономика, перев. с англ., М., «Прогресс», 1964, стр. 27.

«неоклассики», которых усиленно «пропагандирует» М. Интрилигатор. Так, видный «неоклассик» Джоан Робинсон, критикуя Маркса, утверждала: «...Средняя норма прибыли — это не норма равновесия или цена предложения капитала. Это просто средняя доля всего того излишка, который в какой-либо момент капиталистическая система успевает произвести»¹. Впрочем, она, по-видимому, не особенно твердо в этом убеждена, так как в другой своей работе Робинсон без всяких оговорок прибегает к гипотезе Смита:

«Конкуренция преобладает в том смысле, что во всех отраслях производства на всех стадиях производства цена капитала одинакова»².

П. Самуэльсон дает следующую мотивировку отказа от единой нормы прибыли в одном из примечаний своего главного труда:

«...Никакого единственного реального процента на капитал не предполагается для капиталистического или социалистического государства. Равенство было бы необходимо только в крайне необычном случае, когда относительные цены всех товаров остаются во времени одинаковыми»³.

Конечно, при изменениях потребности в отдельных товарах и техники производства в отдельных отраслях соответствующая норма прибыли должна смещаться. Но в теоретическом анализе обязательно должна учитываться господствующая тенденция. Она должна проявляться даже в том примере возникновения и развития капиталистического предприятия, который разбирает П. Самуэльсон в своей работе:

«Вы решили открыть предприятие по производству зубной пасты. Вы могли получить хорошее образование в области химии... Допустим, предприятие процветает... По всей вероятности, пришла пора поискать компаньона... Предположим, что Ваш шурин в обмен на вложенные им 25 тыс. долл. получил часть собственности в деле»⁴.

¹ Joan Robinson, An Essay on Marxian Economics, London, 1957.

² Joan Robinson, A Neoclassical Theorem, *The Review of Economics Studies*, Vol. XXIX (3), 1962.

³ P. A. Samuelson, Foundations of Economic Analysis, Atheneum, N. Y., 1970.

⁴ П. Самуэльсон, Экономика, перев. с англ., М., «Прогресс», 1964, стр. 94—96.

Положение обрисовано очень ясно. Но надо предполагать, что шурин такого предпринимателя наверняка предварительно сравнивал прибыльность различных предприятий своих родственников (да и не только их). А этим и обусловливается тенденция нормы прибыли к выравниванию в различных отраслях народного хозяйства.

Тщательное статистическое исследование данного вопроса провел индийский экономист Минхас. Он нашел, что в значительном числе случаев расхождения между нормами прибыли в отдельных отраслях следует относить за счет высокой степени монополизации производства в них¹.

Категорическое суждение Маркса о единой норме прибыли общеизвестно: «...Не подлежит никакому сомнению, что в действительности, если оставить в стороне несущественные случайные и взаимно уничтожающиеся различия, в разных отраслях промышленности не существует различия между средними нормами прибыли, да и не может существовать его без разрушения всей системы капиталистического производства»².

К этому можно добавить лишь восторженный отзыв американского экономиста-математика В. Леонтьева об авторитете Маркса в такого рода вопросах: «Значение Маркса для новейшей экономической теории в том, что он представляет неиссякаемый источник непосредственного наблюдения... Если вы, прежде чем пытаться что-либо объяснить, пожелаете узнать, что же представляет собой в действительности прибыль, заработная плата и капиталистическое предприятие, то в трех томах «Капитала» вы получите более реалистическую и относящуюся к делу информацию, чем, возможно, вы надеетесь найти в десятке последовательных выпусков американских ценов и дюжине руководств по современной экономике»³.

5. МОДЕЛЬ СБАЛАНСИРОВАННОГО РОСТА ДЖ. ФОН НЕЙМАНА

Если в модели «экономического равновесия» Вальраса — Эрроу — Дебре о равенстве процента на капитал в разных отраслях производства даже не упоминается,

¹ B. S. Minhas, An International Comparism of Factor Costs and Factor Use, N. Y., 1962.

² К. Маркс и Ф. Энгельс, Соч., т. 25, ч. 1, стр. 167.

³ W. Leontief, Essays in Economics, N. Y., Oxford University Press, 1968.

то в модели «общего равновесия» Джона фон Неймана это равенство кладется во главу угла.

Модель фон Неймана (которого П. Самуэльсон назвал «гигантом современной математики»¹) получила в литературе высшую оценку. Ее называют «знаменитой»², утверждают, что она «сильно влияет на экономическую теорию вплоть до настоящего времени и что полностью все ее разветвления до сих пор еще не выявлены»³.

Действительно, модель фон Неймана представляет интересное явление в развитии математической экономики. М. Интрилигатор сосредоточивает свое внимание исключительно на ее чисто математической стороне. Необходимо поэтому показать достаточно полно экономическое содержание модели фон Неймана.

Модель фон Неймана сильно схематизирует экономическую действительность. Модель относится к замкнутому динамическому типу, техника производства предполагается неизменяющейся.

Время в модели подразделяется на равные промежутки; выпуски продукции в каждом данном промежутке служат затратами в следующем промежутке. Товары с «длительным периодом изнашивания», по выражению Энгельса⁴, — средства труда — показываются в выпуске продукции каждого периода в количествах, уменьшенных в соответствии с коэффициентами их выбытия. Так как структура народного хозяйства в каждом последовательном периоде времени одна и та же, промежутки времени (производственные циклы), если иметь в виду обычное сельскохозяйственное производство, не могут быть меньше одного года.

В модели нет непроеизводственного потребления, кроме потребления рабочих, но рабочая сила не показывается. Для организации производства какого-либо товара надо располагать, помимо средств производства в определенном составе, еще и соответствующим количеством «пайков», т. е. наборов предметов потребления рабочих. Число

рабочих, занятых на производстве, должно быть равно имеющемуся у предпринимателя числу «пайков». Природные ресурсы (земля, полезные ископаемые), так же как и ресурсы рабочей силы, предполагаются неограниченными.

В каждом производстве (производственном процессе) в модели фон Неймана обязательно имеются «связанные продукты». В выпуске каждого производственного процесса, кроме товара, который изготавливается (он может быть и не одним, например зерно и солома), обязательно фигурируют не полностью сносенные средства труда. Модель «затраты — выпуск» Леонтьева (межотраслевой баланс), в которой каждое производство (производственный процесс) выпускает только один продукт, можно рассматривать как частный случай модели фон Неймана.

В модели заданными величинами являются нормы затрат и нормы выпуска товаров в каждом производственном процессе, возможно, в нескольких вариантах. Эти нормы определяются в расчете на условно устанавливаемые единицы «интенсивности» процессов, т. е. на условные объемы производства. Нормы предусматриваются в модели соответственно в виде двух матриц: матрица норм затрат и матрица норм выпуска. В строках матриц указываются, например, производственные процессы, а в столбцах — товары. В модели «затраты — выпуск» Леонтьева имеется только одна матрица затрат на единицу выпуска продукции.

Объемы выпусков товаров и затрат на них представляют собой произведения норм выпусков и норм затрат на интенсивности процессов. Неизвестными (искомыми) величинами в модели являются интенсивности процессов, а следовательно, и объемы выпусков и затрат; соотношения между интенсивностями процессов одинаковы во всех периодах времени. Неизвестными являются также цены товаров, одинаковые во всех промежутках времени.

Предпринимательский доход в модели не предусматривается. Норма прибыли совпадает с процентом на капитал. Для определения процента на капитал вычисляется в каждом производственном процессе сумма произведений цен товаров на их выпуски и сумма произведений цен затрачиваемых товаров на объемы их затрат. Процент на капитал представляет собой отношение первой суммы ко второй минус единица.

¹ P. A. Samuelson, Maximum Principles in Analytical Economics, *The American Economic Review*, vol. LXII, № 3, June 1972.

² R. Dorfman a.o., op. cit., p. 181.

³ T. C. Koopmans, Economic Growth at a Maximal Rate, *The Quarterly Journal of Economics*, vol. LXXVIII, August 1964, p. 355.

⁴ К. Маркс и Ф. Энгельс, Соч., т. 18, стр. 266.

Предполагается существование совершенной конкуренции. Это значит, что, во-первых, процент на капитал одинаков во всех производственных процессах; процесс не осуществляется, если процент на капитал в нем оказывается ниже среднего по народному хозяйству, т. е. интенсивность такого процесса равна нулю; во-вторых, если товар производится в данное время в размере, превышающем потребность в нем в следующем периоде, он становится даровым благом, и цена такого товара равна нулю (таким товаром может оказаться, например, солома при производстве зерна). Абсолютные значения интенсивностей и цен в модели не определяются. Определяются только соотношения между интенсивностями и соотношения между ценами.

Главный вывод из модели фон Неймана следующий: темп роста объема производства товаров, одинаковый для всех товаров во все периоды («техничко-экономический» рост народного хозяйства), совпадает с «экономическим» ростом, т. е. с ростом денежной стоимости всех выпускаемых товаров и, следовательно, с процентом на капитал. При соответствующих значениях норм затрат и норм выпуска народное хозяйство в модели фон Неймана может находиться в состоянии неограниченного роста.

Такой вывод из модели следовало ожидать. Однако строгое доказательство его довольно сложно. Оно основано на теории игр, зачатки которой были заложены в работах французского математика Эмиля Бореля в начале XX в.

Теория игр рассматривает конфликтные ситуации. Наличие игры в данной проблеме толкуется следующим образом. Чтобы организовать производственный процесс, предпринимателям необходим капитал, т. е. сумма произведений затрат товаров на их цены. Имея в виду получение прибыли, предприниматели заинтересованы, с одной стороны, в низком проценте на занимаемый ими капитал, с другой — в расширении роста производства. Математически условия задачи сформулированы так, что из всех возможных вариантов технологических процессов и соотношений цен устанавливаются такие, при которых «технологический» рост народного хозяйства (расширение производства) совпадает с «экономическим» ростом (процентом на капитал); предпринимательская прибыль отсутствует.

В литературе отмечается, что анализ экономического содержания модели фон Неймана позволяет установить ее родство схемам расширенного воспроизводства Маркса.

Первым, кто сделал попытку сопоставить модель фон Неймана и схему воспроизводства Маркса, был японский экономист Моришима, президент Эконометрического общества в 1965 г. Он ввел в модель фон Неймана ряд дополнительных условий, в том числе потребление капиталистов и предположение о снашивании основного капитала в течение одного промежутка времени (последнее, впрочем, следует считать существенным отклонением от действительности). Это свое построение Моришима назвал «моделью Маркса — фон Неймана»¹.

В таком же направлении комментировал модель фон Неймана на Международной научной конференции по разработке межотраслевых балансов в Москве в июне 1967 г. сотрудник Венгерской Академии наук Броди. По мнению Броди, «эта модель Неймана, хотя и долгое время забытая, означала по двум причинам поворотный пункт в истории математической экономики».

Во-первых, по словам Броди, она является первой моделью, открывшей путь экономическому применению более современных средств математики. Нейман в этом случае нашел математический формальный язык, адекватный экономическим проблемам. Этот формальный язык, система линейных неравенств, особенно после последующего появления вычислительных машин, оказался решающим с точки зрения дальнейшего развития.

Во-вторых, как отмечает Броди, модель имеет важную теоретическую особенность: Нейман в отличие от Вальраса в центр модели вместо рынка поставил производственные связи, выводя из них рыночные отношения. «Для меня неясно, — пишет Броди, — насколько сознательна была такая «уступка» марксистской экономии со стороны Неймана. Он сам, описывая свои предположения, скупово говорит об этом лишь следующее: «Вполне очевидно, теоретической модели какого типа соответствуют вышеизложенные предположения». Мне кажется, однако, что если бы он сознавал влияние Маркса, то не удивился бы замечательной «дуальной симметрии» своей модели в отно-

¹ М. Моришима, *Равновесие, устойчивость, рост*, перев. с англ., М., «Наука», 1972, стр. 174 и сл.

шений денежных и технических переменных — ведь положение о том, что стоимостные отношения лишь отражают отношения общественного разделения труда, было развито Марксом в первом томе его главного произведения. Поэтому мне представляется, что влияние трудовой теории стоимости ни в коем случае не является сознательным, и, таким образом, лишь благодаря своеобразной способности Неймана к абстрактному мышлению его модель стала точкой соприкосновения двух экономических школ, допускающая и даже вынуждая двойственную интерпретацию»¹.

Внимательное изучение модели роста народного хозяйства фон Неймана позволяет прийти к более категоричным выводам, нежели те, которые были сделаны Моришимой и Броди, и сделать заключение о тождественности, по существу, предпосылок, лежащих в основе схем воспроизводства Маркса, с одной стороны, и модели фон Неймана — с другой.

Прежде всего у фон Неймана, как и у Маркса, в товарном обороте нет уникальных произведений искусства, погашенных почтовых марок и т. п., т. е. таких «товаров», определением цен которых так гордится теория предельной полезности перед трудовой теорией стоимости. Одинакова у них предпосылка совершенной конкуренции, выражающаяся в выравнивании нормы прибыли во всех производствах и в утверждении, что все товары свободно производятся с приложением труда и капитала. Как у фон Неймана, так и на первой стадии анализа у Маркса нет земельной ренты. У фон Неймана, так же как у Маркса, в схемах производства нет непосредственно затрат труда, а показываются лишь предметы потребления, служащие для найма рабочих.

Наконец, прогресс техники одинаково не предусматривается как у фон Неймана, так и в схеме расширенного воспроизводства Маркса. На последнее указал Ленин в своей работе «По поводу так называемого вопроса о рынках»: «Из вышеприведенной схемы Маркса никакого вывода о преобладании I-го подразделения над II-ым сделать нельзя: оба развиваются там параллельно. Но эта схема не принимает во внимание именно технического

¹ А н д р а ш Б р о д и, О линейных моделях в планировании, перев. с венг., Сборник «Межотраслевой баланс и планирование в странах-членах СЭВ», М., «Экономика», 1969.

прогресса. Как это доказано Марксом в I томе «Капитала», технический прогресс выражается в том, что отношение переменного капитала к постоянному ($\frac{v}{c}$) постепенно уменьшается, между тем как в схеме это отношение принято за неизменное»¹.

Даже условие о неограниченных ресурсах рабочей силы у фон Неймана соответствует резервной армии безработных у Маркса.

Одинаковые предпосылки должны приводить к одинаковым выводам. В модели фон Неймана производятся только предметы потребления рабочих и средства производства, требующиеся для производства предметов потребления, в условиях, исключающих возникновение ренты.

В модели однозначно определяется норма прибыли, совпадающая с процентом на капитал. В этом выводе нет ничего нового: его получил еще Рикардо.

Как бы предчувствуя, что эта проблема еще будет обсуждаться в дальнейшем, Рикардо категорически заявил: «...Во всех странах и во все времена прибыль зависит от количества труда, требующегося для снабжения рабочих предметами первой необходимости на той земле и с тем капиталом, которые не приносят никакой ренты»². Этот вывод в начале нашего века был математически подтвержден известным русским экономистом и математиком Дмитриевым³. Вывод Дмитриева воспроизводит в одной из своих работ В. И. Борткевич.

Фон Нейману как математику сочинения Рикардо, возможно, были неизвестны, но его многочисленным комментаторам-экономистам не упомянуть о них просто непростительно.

Главный и справедливый упрек, который следует сделать буржуазным экономистам-математикам, — это игнорирование ими качественного отличия труда от других видов производственных затрат. Необходимо, следовательно, выяснить, как именно количественно должно отразиться в модели фон Неймана это качественное отличие затрат труда от затрат других средств производства.

¹ В. И. Ленин, Полн. собр. соч., т. 1, стр. 78.

² Д а в и д Р и к а р д о, Начала политической экономии, М., 1955, стр. 110.

³ В. К. Д м и т р и е в, Экономические очерки, М., 1904.

Основой модели фон Неймана являются заданные нормы затрат предметов потребления рабочих и средств производства на единицу интенсивности производственного процесса. Комментаторы фон Неймана отмечали, что нормы затрат предметов потребления определяются уровнем потребления рабочих¹. Уровень потребления соответствует «прожиточному минимуму», необходимому для воспроизводства рабочей силы. Прожиточный минимум входит, таким образом, в общие технические условия, в которых модель действует и влияет на норму прибыли.

Однако до сих пор не привлекал внимания другой фактор норм затрат предметов потребления на единицу выпускаемой продукции — продолжительность рабочего дня. Такой фактор может рассматриваться технологически заданным только в отношении рабочего скота или рабов. Но не обращать внимания на продолжительность рабочего дня наемного рабочего — значит отвлекаться от самого существенного элемента политической экономии капитализма.

Продолжительность рабочего дня в современном капиталистическом обществе определяется не технологическими условиями, а классовой борьбой. Если же представить себе рабочих совершенно разобщенными, то продолжительность их рабочего дня окажется зависимой от степени настоятельности их потребностей. Таким образом, при одном и том же уровне технологических знаний, как это принимается в модели фон Неймана, продолжительность рабочего дня может быть различной.

Нетрудно видеть, что нормы затрат предметов потребления на единицу интенсивности производственного процесса в модели фон Неймана при одной и той же технике производства и при одном и том же прожиточном минимуме обратно пропорциональны продолжительности рабочего дня. Другими словами, число часов труда, требующееся на обработку данной детали, технологически определено, а сколько для этого потребуется рабочей силы и, следовательно, предметов потребления, необходимых для ее воспроизводства, зависит от продолжительности рабочего дня. В модели фон Неймана нормами затрат предметов потребления рабочих на единицу выработки

¹ P. G. Champagnone, A Note of J. V. Neumann's Article on Model of Economic Equilibrium, *Review of Economic Studies*, 1945-1946, vol. XII, № 33.

(как и другими нормами затрат и выпуска) определяется в конечном счете процент на капитал.

Обратимся теперь к формуле нормы прибавочной стоимости Маркса m' , приведенной на стр. 20. В этой формуле знаменатель определяется техникой производства и прожиточным минимумом, т. е. нормами затрат средств производства и труда в часах на предметы потребления для рабочих и соответствующие средства производства на всех стадиях их производства. При постоянном знаменателе, как это и есть в модели фон Неймана, норма прибавочной стоимости плюс единица ($m' + 1$) пропорциональна продолжительности рабочего дня.

Отсюда следует, что в модели роста народного хозяйства фон Неймана процент на капитал определяется нормой прибавочной стоимости.

Имеются основания полагать, что в оптимально организованном народном хозяйстве затраты труда на отдельные группы потребительских товаров, удовлетворяющие обособленные потребности и не связанные между собой в производстве, должны быть пропорциональны ценам¹. Оптимальность здесь понимается в том смысле, что потребители (рабочие, как в модели фон Неймана) при данном объеме заработной платы и при данном числе часов труда в товарах, составляющих заработную плату (знаменатель в формуле m'), всегда так выбирают товары, соотносясь с их ценами, чтобы наилучшим образом удовлетворить свои потребности. Если любую организацию народного хозяйства формально удовлетворяют цены производства, то при оптимальной его организации цены по указанным группам товаров оказываются уже пропорциональными стоимостям. Соответственно оптимальному состоянию народного хозяйства должно быть организовано производство. Это значит, как установил Маркс, что при равной годовой норме прибыли и равном периоде оборота авансированного капитала органическое строение капитала в разных производствах должно быть одинаковым.

В модели фон Неймана органическое строение авансированного капитала можно выяснить на основании матрицы норм затрат. Эта матрица задается произвольно, она

¹ А. А. Конюс, Трудовая теория стоимости и оптимальное планирование, Сб. «Оптимальное планирование и совершенствование управления народным хозяйством», М., «Наука», 1969.

не отвечает оптимальному состоянию народного хозяйства в смысле наилучшего удовлетворения потребностей общества (в модели фон Неймана — рабочих) при известных ценах и заработной плате. Как указывают комментаторы фон Неймана, в его модели можно предусмотреть различные варианты наборов товаров для потребления рабочих: «Фактически может быть более чем один способ как производить рабочую силу, так и другие товары»¹. Комментаторы, однако, упускают из вида, что рабочих нельзя принудительно кормить, как скот или рабов. Предметы потребления продаются по известным ценам, и рабочий волен на свою заработную плату покупать те товары, какие он пожелает. Модель фон Неймана определяет на основании матрицы норм затрат и матрицы норм выпуска соотношения между количествами товаров, входящих в состав рациона рабочего, и соотношения между ценами этих товаров. А рабочие при этих соотношениях цен могут выбрать иные соотношения количеств потребляемых товаров. И тогда модель фон Неймана не будет «работать».

Из сказанного следует, что в модели фон Неймана нельзя произвольно задавать матрицы затрат и выпуска продукции. Если эти матрицы будут составлены так, что органическое строение авансированного капитала в производствах разных групп товаров (образованных, как указано выше) при одинаковом периоде его оборота будет одинаковыми, то цены будут пропорциональны затратам труда и размеры производства товаров личного потребления совпадут с платежеспособным спросом на них со стороны рабочих.

В литературе неоднократно высказывались разного рода предложения ввести в модель общего равновесия фон Неймана свободное, не рационированное потребление рабочих и тем самым сблизить ее с моделью Вальраса — Эрроу — Дебре. Однако эти предложения успеха не имели.

Настойчивое желание изгнать из математического анализа капиталистического хозяйства представление о едином проценте на вложенный капитал в разных отраслях производства — представление, связанное с построениями Смита, Рикардо и Маркса, — привело М. Интрилигатора, вслед за рядом других математиков, к попытке выхо-

стить главное содержание модели фон Неймана. Эта попытка выразилась в неестественном предположении, что вместо одинакового роста капитала в разных отраслях все цены в динамике снижаются в одинаковом соотношении (стр. 313). Сам фон Нейман в статье о своей модели такого оборота дела не предусматривал.

Подводя итоги критике математических моделей буржуазной политической экономии, В. В. Новожилов заметил: «Модель Вальраса в новейшей ее формулировке и модель Дж. фон Неймана — стройные теоретические системы, результат немалого труда крупных экономистов и математиков. И тем не менее при их построении упущены наиболее очевидные истины»¹.

Упущение наиболее очевидных истин связано, как было показано, с апологетикой капиталистического хозяйства. Это особенно проявилось в модели Вальраса — Эрроу — Дебре, что и обесценивает ее экономическое значение. Вместе с тем надо признать, что математики-экономисты капиталистических стран разработали эффективный, разветвленный и искусно оформленный математический инструментарий анализа некоторых экономических явлений. Овладение им и использование его на основе принципов марксистско-ленинской экономической теории — задача современного этапа в развитии экономико-математических методов, являющихся полезным вспомогательным орудием при планировании социалистического хозяйства.

Математически подготовленный и марксистски образованный читатель найдет в книге М. Интрилигатора материал, пригодный для использования в различных областях экономики.

А. Конюс

¹ R. Dorfman a.o., op. cit., p. 382.

¹ В. В. Новожилов, Математические модели народного хозяйства в буржуазной политической экономии и их критика. «Труды научного совещания о применении математических методов в экономических исследованиях», т. II, «Математический анализ расширенного воспроизводства», М., изд-во АН СССР, 1962.

Задачи оптимизации в современном мире возникают повсюду: в естественных и гуманитарных науках, в технике и в хозяйственной деятельности. Благодаря этому последние достижения теории оптимизации, особенно в математическом программировании и в теории управления, находят многие важные области применения и обещают стать еще более широко используемыми в будущем.

Настоящая книга задумана как достаточно полное введение в методы статической и динамической оптимизации и их приложения к экономической теории и является одновременно обзором опубликованных материалов по указанным вопросам. Она отличается от других книг подобного рода тем, что в нее включены и теория математического программирования и теория управления. Хотя по каждой из охваченных здесь тем существуют отдельные книги, тем не менее представляется, что такая книга, в которой все эти вопросы рассматриваются совместно, была бы полезной в том отношении, что в ней можно показать важные взаимосвязи между отдельными дисциплинами и логику их развития. Поскольку каждая из глав сама по себе могла бы стать целой книгой, необходимо было произвести тщательный отбор материала. Основное внимание здесь уделено тому, чтобы как можно яснее представить рассматриваемую задачу и указать наилучший метод ее решения, с тем чтобы позволить читателю использовать эти приемы при решении задач. Хотя размеры книги не позволили включить в нее некоторые строгие доказательства, детальные уточнения и обобщения, а также ряд частных случаев, все же они косвенным образом учтены в примечаниях, задачах, приложениях и в библиографии. Некоторые задачи представляют собой

упражнения для овладения техническими приемами, но большая их часть — это учебные и исследовательские задачи, подсказывающие новые идеи и представляющие собой в какой-то мере «вызов» читателю. В конце книги приведена библиография; наиболее важные литературные источники указаны в первом примечании к каждой из глав.

Книга может быть использована как учебное пособие по математической экономике и математической оптимизации. Она может применяться и как дополнение к курсу экономической теории и исследования операций. Книга может представить интерес и для уже работающих экономистов, инженеров и специалистов, работающих в области исследований операций.

Уровень математического изложения настолько элементарен, насколько это возможно: знание основных сведений из математического анализа и матричной алгебры является достаточным. Для удобства читателя весь необходимый математический материал представлен в приложениях.

Экономические приложения теории оптимизации определяются тем, что с ее помощью можно решать экономические задачи распределения ресурсов, которые в настоящей книге названы задачами рационального ведения хозяйства (economizing problems).

Часть I книги состоит из одной вводной главы, в которой рассматривается взаимосвязь между задачами рационального ведения хозяйства и экономической теорией.

Часть II и часть III посвящены статическим задачам, относящимся к некоторому моменту времени. В части II представлены методы статической оптимизации (программирования). Сюда входят методы решения классических задач математического программирования, нелинейное программирование, линейное программирование и теория игр. В части III представлены приложения методов статической оптимизации к экономическим задачам распределения ресурсов, включая теорию потребления, теорию фирмы, общее равновесие и теорию экономического благосостояния.

Часть IV и часть V книги посвящены динамическим задачам, относящимся к некоторому интервалу времени. В части V представлены методы динамической оптимизации (управления), включая вариационное исчисление, динамическое программирование, принцип максимума

Задачи математической оптимизации и план книги

и дифференциальные игры. Часть V содержит приложения этих методов к экономической задаче распределения ресурсов во времени, а именно к задаче оптимального экономического роста.

В данной книге существенную роль играет разделение задач оптимизации на статические и динамические. Можно разделить эти задачи и по-другому, например на задачи без ограничений или только с ограничениями типа равенств, таких, как

$$8x_1 + 2x_2 = 5,$$

и на задачи с ограничениями типа неравенств, таких, как

$$8x_1 + 2x_2 \leq 5.$$

Различаются также задачи, в которых принятие решения зависит от одного лица, и задачи с двумя и более лицами, принимающими решения. Классификация методов математической оптимизации по указанным признакам, принятая в книге, дана в таблице. Как показано в таблице, сначала рассматриваются задачи статической оптимизации с одним лицом, принимающим решения, и с ограничениями типа равенств, затем задачи с одним лицом, принимающим решения, и ограничениями типа неравенств, и, наконец, статические задачи с несколькими лицами, принимающими решения. В аналогичном порядке рассматриваются и динамические задачи: сначала задачи с ограничениями типа равенств, затем с ограничениями типа неравенств и, наконец, задачи с несколькими лицами, принимающими решения. Эти последние задачи — динамические задачи с ограничениями типа неравенств и с несколькими лицами, принимающими решения, — являются на самом деле наиболее общими задачами. Действительно, статические задачи можно считать частными случаями динамических задач, задачи с ограничениями типа равенств — частными случаями задач с ограничениями типа неравенств, а задачи с одним лицом, принимающим решения, можно считать частными случаями задач с несколькими лицами, принимающими решения. Стохастические задачи в этой книге не затрагиваются — рассматриваются только детерминированные задачи.

Для меня было исключительной удачей получить полезные комментарии и предложения по всем частям рукописи от многих лиц, в том числе от Кеннета Эрроу,

Свойства ограничений; число лиц, принимающих решения	Время	Статические задачи математического программирования (гл. 2 и часть II)	Динамические задачи управления (гл. 11 и часть IV)
	Ограничения отсутствуют или имеются ограничения равенства; одно лицо, принимающее решения	Классическая задача математического программирования (гл. 3)	Вариационное исчисление (гл. 12)
Ограничения — неравенства; одно лицо, принимающее решения	Нелинейное программирование (гл. 4) и линейное программирование (гл. 5)	Динамическое программирование (гл. 13) и принцип максимума (гл. 14)	
Два или более лиц, принимающих решения	Теория игр (гл. 6)	Дифференциальные игры (гл. 15)	

Роберта Ауманна, Стюарта Дрейфуса, Артура Джефриона, Губерта Халкина, И.-С. Хо, Питера Калмана, Роберта Кьюэнна, Мордекай Курца, Хэйн Леланд, Алана Манна, Джона Мак-Дональда, Мичио Моришима, Чарльза Плотта, Ларри Руффа, Карла Шелла и прежде всего от Дональда Бэра.