

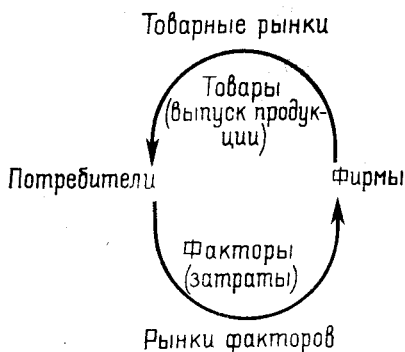
Глава 9

Общее равновесие

Задача общего равновесия заключается в анализе взаимосвязи двух основных элементов микроэкономики — потребителей и фирм, в терминах цен и объемов товаров и затраченных ресурсов¹. Взаимосвязь между основными элементами показана на рис. 9.1 в виде круговой диаграммы потоков. Потребители, располагающие набором некоторых факторов, в том числе рабочей силой, получают доход от их продажи на рынке и используют его для приобретения товаров на рынке товаров. Фирмы используют факторы для того, чтобы произвести товары. Таким образом, в задаче общего равновесия заданными считаются вкусы и ресурсы потребителей и технологические процессы фирм-производителей.

При изучении экономического взаимодействия между потребителями и фирмами важное значение имеет описа-

¹ Теория общего равновесия рассматривается в книгах [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9].



Р и с. 9.1. Круговая диаграмма потоков.

ние тех условий, которые необходимы для существования равновесия, установление обстоятельств, при которых оно единственно, и анализ его устойчивости. Таким образом, в теории общего равновесия существует три основные проблемы: *существование, единственность и устойчивость равновесия*¹.

9.1. КЛАССИЧЕСКИЙ ПОДХОД ПОДСЧЕТ УРАВНЕНИЙ И НЕИЗВЕСТНЫХ ВЕЛИЧИН

Классический подход к общему равновесию основывался на таком методе, при котором для каждого частного потребителя и фирмы в экономике перечислялись условия равновесия и подсчитывалось количество уравнений, описывающих эти состояния равновесия [10, 11].

Рассмотрим экономику, производящую n товаров (выпусков) и имеющую m факторов (видов затрат). Пусть p_j есть цена j -го товара, $j = 1, 2, \dots, n$, тогда вектор-строка

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (9.1.1)$$

характеризует цены выпуска. Аналогично, обозначив через w_i оплату i -го фактора, $i = 1, 2, \dots, m$, получим вектор-строку

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_m). \quad (9.1.2)$$

Предполагается, что экономика является *конкурентной* в том смысле, что все потребители и фирмы действуют по заданным ценам.

В экономике существует F фирм, каждая из которых производит затраты на рынке факторов для изготовления

¹ Некоторые другие проблемы, встречающиеся в теории общего равновесия, включают *сравнительную статику* (изучение чувствительности равновесия к изменениям определенных параметров), *вычисление равновесных цен* (изучение алгоритмов нахождения равновесия) и *оптимальность равновесия* (изучение экономики благосостояния). Проблема оптимальности рассматривается в следующей главе, посвященной экономике благосостояния; материал, изложенный в ней, тесно связан с материалом данной главы. Действительно, в ряде случаев, особенно при обсуждении конкурентного равновесия, здесь мог быть использован материал гл. 10.

продуктов, продаваемых на рынке товаров. Пусть r_i^f — количество первичных затрат i -го вида, «купленных» фирмой f , а c_j^f — объем выпуска j -го продукта, продаваемого фирмой f . Тогда прибыль этой фирмы π^f будет состоять из годового дохода от продажи за вычетом стоимости покупок

$$\pi^f = \sum_{j=1}^n p_j c_j^f - \sum_{i=1}^m w_i r_i^f, \quad f = 1, 2, \dots, F. \quad (9.1.3)$$

Пусть c^f — вектор-столбец, составленный из объемов товаров, проданных фирмой f

$$c^f = (c_1^f, c_2^f, \dots, c_n^f)', \quad (9.1.4)$$

r^f — вектор-столбец, составленный из объемов факторов, «купленных» фирмой f

$$r^f = (r_1^f, r_2^f, \dots, r_m^f)'. \quad (9.1.5)$$

Тогда прибыль фирмы f может быть выражена соотношением

$$\pi^f = p c^f - w r^f, \quad f = 1, 2, \dots, F. \quad (9.1.6)$$

Каждая фирма максимизирует сумму своей прибыли при условии выполнения ограничения в форме производственной функции, которую можно записать в общем виде неявной функцией

$$\Phi^f(c_1^f, c_2^f, \dots, c_n^f; r_1^f, r_2^f, \dots, r_m^f) = \Phi^f(c^f, r^f) = 0. \quad (9.1.7)$$

Сформулируем задачу для фирмы f

$\max_{c^f, r^f} \pi^f = p c^f - w r^f$ при условии

$$\Phi^f(c^f, r^f) = 0. \quad (9.1.8)$$

Функция Лагранжа для этой задачи записывается следующим образом:

$$L^f = p c^f - w r^f + y^f (\Phi^f(c^f, r^f)), \quad (9.1.9)$$

где y^f — множитель Лагранжа для фирмы f . Предполагается, что фирма производит продукцию каждого вида и потребляет все виды факторов. Необходимым условием

максимизации прибыли при ограничении в виде производственной функции является выполнение соотношений

$$\begin{aligned}\frac{\partial L^f}{\partial c^f} &= p + y^f \frac{\partial \Phi^f}{\partial c^f} = 0 \\ \frac{\partial L^f}{\partial r^f} &= -w + y^f \frac{\partial \Phi^f}{\partial r^f} = 0 \\ \frac{\partial L^f}{\partial y^f} &= \Phi^f(c^f, r^f) = 0,\end{aligned}\quad (9.1.10)$$

что приводит к $n + m + 1$ уравнениям

$$\begin{aligned}y^f \frac{\partial \Phi^f}{\partial c^f} &= -p \\ y^f \frac{\partial \Phi^f}{\partial r^f} &= w \\ \Phi^f(c^f, r^f) &= 0\end{aligned}\quad (9.1.11)$$

с $n + m + 1$ неизвестными c^f, r^f, y^f . Так как эти уравнения справедливы для каждой из фирм ($f = 1, 2, \dots, F$), в итоге мы получаем $(m + n + 1)F$ уравнений для задачи общего равновесия.

В экономике есть H потребителей, каждый из которых владеет определенным фактором, как, например, рабочая сила, который он может продать на рынке факторов по заданным ценам и получить доход. Кроме этого, каждый потребитель может иметь свою долю в фирме и получать часть прибыли. Общий доход от продажи факторов и участия в деле используется на покупку товаров по заданным ценам на рынке товаров. Пусть c_j^h обозначает количество j -го товара, купленного потребителем h , а r_i^h — количество i -го фактора, проданного потребителем h . Тогда полезность, получаемая потребителем h , зависящая и от потребленных товаров и от предоставленных факторов, будет выражена функцией

$$U^h = U^h(c_1^h, c_2^h, \dots, c_n^h, r_1^h, r_2^h, \dots, r_m^h) = U^h(c^h, r^h), \quad (9.1.12)$$

где c^h — вектор-столбец товаров, потребленных потребителем h , а r^h — вектор-столбец факторов, предложенных потребителем h

$$c^h = (c_1^h, c_2^h, \dots, c_n^h)', \quad (9.1.13)$$

$$r^h = (r_1^h, r_2^h, \dots, r_m^h)', \quad h = 1, 2, \dots, H. \quad (9.1.14)$$

Запишем бюджетное ограничение для потребителя h

$$\sum_{i=1}^m w_i r_i^h + \sum_{f=1}^F s^{hf} \pi^f = \sum_{j=1}^n p_j c_j^h, \quad (9.1.15)$$

где первая сумма в левой части выражает общий доход от продажи факторов; вторая показывает доход потребителя как собственника, где s^{hf} — доля участия потребителя h в фирме f . Выражение в правой части характеризует общий расход. Участие потребителя h в фирмах обобщено вектором-строкой

$$s^h = (s^{h1}, s^{h2}, \dots, s^{hF}), \quad (9.1.16)$$

а прибыль всех фирм записывается вектором-столбцом

$$\pi = (\pi^1, \pi^2, \dots, \pi^F)', \quad (9.1.17)$$

поэтому бюджетное ограничение может быть записано в виде:

$$w r^h + s^h \pi = p c^h. \quad (9.1.18)$$

Таким образом, для потребителя h задача формулируется следующим образом:

$\max_{c^h, r^h} U^h(c^h, r^h)$ при условии

$$w r^h + s^h \pi = p c^h. \quad (9.1.19)$$

Запишем функцию Лагранжа для этой задачи

$$L^h = U^h(c^h, r^h) + y^h (w r^h + s^h \pi - p c^h), \quad (9.1.20)$$

где y^h — множитель Лагранжа для потребителя h . Предполагается, что потребитель покупает товары всех видов и предлагает некоторое количество факторов всех видов. Необходимое условие максимизации полезности при выполнении бюджетного ограничения может быть выражено системой уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial L^h}{\partial c^h} &= \frac{\partial U^h}{\partial c^h} - y^h p = 0 \\ \frac{\partial L^h}{\partial r^h} &= \frac{\partial U^h}{\partial r^h} + y^h w = 0 \\ \frac{\partial L^h}{\partial y^h} &= w r^h + s^h \pi - p c^h = 0,\end{aligned}\quad (9.1.21)$$

это дает $(n + m + 1)$ уравнений с $(n + m + 1)$ неизвестными.

$$\frac{\partial U^h}{\partial c^h} = y^h p$$

$$\frac{\partial U^h}{\partial r^h} = -y^h w \quad (9.1.22)$$

$$w r^h + s^h \pi - p c^h = 0.$$

Так как эти уравнения справедливы для каждого из H потребителей ($h = 1, 2, \dots, H$), то в итоге мы получаем $(m + n + 1)H$ уравнений для задачи общего равновесия.

Следующая группа уравнений связана с рыночным механизмом и устанавливает, что общая сумма спроса на любой товар или фактор должна быть равна сумме предложения этого товара или фактора. Равновесие на товарных рынках порождает n уравнений

$$\sum_{h=1}^H c_j^h = \sum_{f=1}^F c_j^f, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (9.1.23)$$

а равновесие на рынках факторов порождает m уравнений

$$\sum_{h=1}^H r_i^h = \sum_{f=1}^F r_i^f, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (9.1.24)$$

Следовательно, описание рыночного механизма дает $(m + n)$ уравнений.

Уравнения (9.1.11) для всех f , (9.1.22) для всех h , (9.1.23) и (9.1.24) — все вместе дают $(m + n + 1)(F + H) + (m + n)$ уравнений. Основное равенство теории общего равновесия, закон Вальраса, утверждает, однако, что общая величина спроса должна быть равна общей величине предложения при какой-либо системе цен. Из этого вытекает, что одно из полученных уравнений не является независимым от всех остальных. Для иллюстрации закона Вальраса рассмотрим бюджетное ограничение (9.1.15). Проведем суммирование по всем потребителям

$$\sum_{h=1}^H \sum_{i=1}^m w_i r_i^h + \sum_{j=1}^n p_j c_j^h = \sum_{h=1}^H \sum_{j=1}^n p_j c_j^h. \quad (9.1.25)$$

При этом мы воспользовались тем фактом, что сумма долей по всем потребителям для каждой фирмы должна быть

равна единице, так как общая собственность владельцев каждой фирмы составляет 100%. Уравнение (9.1.25) означает, что общий доход всех потребителей вместе с общей прибылью всех фирм равняется общей стоимости товаров; этот вывод используется при подсчете национального дохода. Пользуясь определением прибыли (9.1.3), получаем

$$\sum_{h=1}^H \sum_{i=1}^m w_i r_i^h + \sum_{f=1}^F \left(\sum_{j=1}^n p_j c_j^f - \sum_{i=1}^m w_i r_i^f \right) =$$

$$= \sum_{h=1}^H \sum_{j=1}^n p_j c_j^h, \quad (9.1.26)$$

или, сгруппировав выражения,

$$\sum_{i=1}^m w_i \left(\sum_{h=1}^H r_i^h - \sum_{f=1}^F r_i^f \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^n p_j \left(\sum_{h=1}^H c_j^h - \sum_{f=1}^F c_j^f \right). \quad (9.1.27)$$

Из этого выражения закона Вальраса сразу же следует, что одно из уравнений общего равновесия зависимо от остальных. Например, предположим, что все рынки находятся в состоянии равновесия, кроме рынка последнего фактора

$$\sum_{h=1}^H c_j^h = \sum_{f=1}^F c_j^f, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{h=1}^H r_i^h = \sum_{f=1}^F r_i^f, \quad i = 1, 2, \dots, m-1. \quad (9.1.28)$$

Подставив эти выражения в (9.1.27), в правой части получим нуль, так как каждое выражение в скобках обращается в нуль; все члены в левой части также будут нулями, кроме последнего; поэтому

$$w_m \left(\sum_{h=1}^H r_m^h - \sum_{f=1}^F r_m^f \right) = 0. \quad (9.1.29)$$

требуется равновесие на рынке последнего фактора при предположении, что значение w_m ненулевое. Таким образом, последнее уравнение может быть выведено из остальных.

В соответствии с законом Вальраса мы имеем $(m + n + 1)(F + H) + (m + n - 1)$ независимых уравнений. Теперь рассмотрим число неизвестных. Для каждой фирмы f существует набор n объемов продаваемых товаров, m покупаемых факторов и множитель Лагранжа

$$c^f, r^f, y^f, \quad f = 1, 2, \dots, F, \quad (9.1.30)$$

т. е. всего $(n + m + 1)F$ неизвестных. Каждого потребителя h характеризует n купленных товаров, m проданных факторов и множитель Лагранжа

$$c^h, r^h, y^h, \quad h = 1, 2, \dots, H, \quad (9.1.31)$$

т. е. $(n + m + 1)H$ неизвестных. Наконец, существуют цены товаров и факторов

$$p, \quad w. \quad (9.1.32)$$

Но решение задачи (9.1.8) для каждой фирмы при ценах (p, w) является также решением и при ценах $(\alpha p, \alpha w)$, где α — некоторая положительная константа. Это вытекает из того, что максимизация $\alpha \pi^f$ эквивалентна максимизации π^f . Аналогично решение задачи (9.1.19) для каждого потребителя при (p, w) является также решением при $(\alpha p, \alpha w)$ для всех $\alpha > 0$, так как, умножая все цены на неотрицательный коэффициент, мы умножаем на него обе стороны бюджетного ограничения. Таким образом, все функции спроса и предложения являются однородными нулевой степени при любых ценах; это означает, что множество цен можно пронормировать, выбрав один выпуск или затраты в качестве *единицы счета* и измерив все цены относительно него. Например, выбрав первый товар в качестве единицы счета и взяв поэтому $\alpha = 1/p_1$, запишем относительные цены в виде вектора

$$\left(\frac{p}{p_1}, \frac{w}{p_1} \right) = \left(1, \frac{p_2}{p_1}, \frac{p_3}{p_1}, \dots, \frac{p_n}{p_1}, \frac{w_1}{p_1}, \frac{w_2}{p_1}, \dots, \frac{w_m}{p_1} \right). \quad (9.1.33)$$

Таким образом, в итоге мы получим $(n + m - 1)$ ценностных отношений или относительных цен в качестве неизвестных, причем в данном случае все цены выражены относительно цены первого товара, общее число неизвестных поэтому будет $(m + n + 1)(F + H) + (m + n - 1)$, равное числу уравнений. Конечно, равенство количества

неизвестных количеству уравнений не является ни необходимым, ни достаточным условием для существования равновесия. Это также не означает, что решение, если оно существует, является «содержательным» в том смысле, что объемы покупаемых или продаваемых товаров не отрицательны. Эти недостатки классического метода преодолеваются с помощью более современных подходов к теории общего равновесия.

9.2. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

В ПРИМЕНЕНИИ К МОДЕЛИ

«ЗАТРАТЫ—ВЫПУСК»

В экономике, которая описывается производственными функциями типа «затраты — выпуск», задача общего равновесия приводит к задаче линейного программирования и существование содержательного решения может быть строго доказано¹.

Как и раньше, экономика производит n товаров, потребляя m первичных (невоспроизводимых) факторов. Пусть x_j обозначает выпуск всей экономикой товара j , $j = 1, 2, \dots, n$, а r_i — общие затраты фактора i , $i = 1, 2, \dots, m$. Заметим, что часть выпуска может быть продана как товары производителя другим фирмам. Обозначим через x_{kj} количество k -го товара, потребленного для производства j -го товара и через r_{ij} количество i -го фактора, затраченного при производстве j -го товара; запишем производственную функцию типа «затраты — выпуск» для товара j

$$x_j = \min \left(\frac{x_{1j}}{a_{1j}}, \frac{x_{2j}}{a_{2j}}, \dots, \frac{x_{mj}}{a_{mj}}, \frac{r_{1j}}{b_{1j}}, \frac{r_{2j}}{b_{2j}}, \dots, \frac{r_{mj}}{b_{mj}} \right), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (9.2.1)$$

Постоянные параметры a_{kj} и b_{ij} — это *технологические коэффициенты*, неотрицательные величины, характе-

¹ См. [12, 13, 14, 4]. При рассмотрении метода «затраты — выпуск» см. раздел 8.1 нашей книги, а также [15, 16, 17, 18, 4, 8].

² В отличие от предыдущего раздела затраты и выпуски не будут подразделяться на затраты и выпуски потребителей и фирм. Тогда r_i представляет собой общий объем фактора i , имеющийся в распоряжении всех потребителей, и общие затраты этого фактора всеми фирмами. Однако в процессе анализа в этом разделе потребители и фирмы могут быть разделены [3, 19].

ризующие количество k -го продукта и i -го ресурса соответственно, необходимое для производства одной единицы товара j . При этом предполагается, что для каждого продукта j существует по крайней мере один ресурс i , такой, что $b_{ij} > 0$, т. е. по крайней мере один первичный фактор требуется для производства каждого товара.

В предположении, что цены на все товары, факторы и прибыль положительны, максимизация производства всех продуктов требует, чтобы все аргументы функции $\min(\dots)$ были равны между собой и, следовательно, равны выпуску продукции. Таким образом, согласно *уравнениям пропорциональности*

$$\begin{aligned} x_{kj} &= a_{kj}x_j, & j, k = 1, 2, \dots, n, \\ r_{ij} &= b_{ij}x_j, & i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (9.2.2)$$

т. е. затраты продуктов и факторов, необходимых для производства любого продукта, пропорциональны выпуску этого продукта; при этом коэффициентами пропорциональности являются технологические коэффициенты¹.

Выпуск каждого продукта либо затрачивается в производстве товаров, либо удовлетворяет конечный спрос. Таким образом, согласно *балансовым уравнениям*

$$x_k = \sum_{j=1}^n x_{kj} + c_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (9.2.3)$$

где x_k — выпуск продукта k ; первое выражение в правой части характеризует общие затраты продукта k для производства всех остальных продуктов; второе выражение в правой части c_k — конечный спрос на продукт k , включая потребление, инвестиции, экспорт и государственные расходы.

Комбинируя балансовые уравнения и соотношения пропорциональности, получаем

$$x_k = \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j + c_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (9.2.4)$$

¹ Технологические коэффициенты в данном случае были выведены из производственной функции типа «затраты-выпуск». Однако по *теореме замещения* затраты пропорциональны выпуску даже в случае, если в производственных функциях общего вида появляются возможности замещения при условии, что имеется только один дефицитный фактор — отдача, постоянная по масштабу, — и не существует взаимосвязанных продуктов [20, 21, 4, 7].

где левая часть отражает выпуск, а два выражения в правой части — затраты и конечный спрос соответственно. Эти n уравнений, записанные в матричной форме, представляют собой *уравнение Леонтьева*

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}, \quad (9.2.5)$$

где $\mathbf{x}$ — вектор-столбец выпусков; $\mathbf{A}$ — матрица $n \times n$ технологических коэффициентов, а $\mathbf{c}$ — вектор-столбец конечного спроса

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \geq 0, \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \geq 0, \\ \mathbf{c} &= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \geq 0, \end{aligned} \quad (9.2.6)$$

все элементы здесь, как указано, не отрицательны. Представим уравнение в виде

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{c}, \quad (9.2.7)$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица $n \times n$. Если матрица $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ невырожденная, то уравнение Леонтьева может быть решено относительно выпуска, необходимого для производства заданного вектора конечного продукта

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{c}, \quad (9.2.8)$$

где $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ называется *матричным мультипликатором*, так как изменение конечного продукта на $\Delta\mathbf{c}$ вызывает изменение выпуска $\Delta\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\Delta\mathbf{c}$.

¹ Обратная матрица к $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ существует и не отрицательна, если удовлетворяются условия *Хукинса — Саймона*, т. е. все главные миноры $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ положительны. Тогда обратная матрица может быть

Теперь рассмотрим первичные факторы (ресурсы). Количество фактора i , необходимое для выпуска x_j , из (9.2.2), вычисляется по формуле

$$r_{ij} = b_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (9.2.9)$$

поэтому суммирование по всем выпускам дает спрос всей экономики на i -й фактор

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} = \sum_{j=1}^n b_{ij}x_j. \quad (9.2.10)$$

Но спрос на i -й фактор не может превышать его предложение

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}x_j \leq r_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (9.2.11)$$

где r_i отражает реальное предложение фактора i . В матричном обозначении имеем

$$Bx \leq r, \quad (9.2.12)$$

где x — упомянутый выше вектор-столбец выпусков; B — матрица технологических коэффициентов производства факторов размерности $m \times n$, а r — вектор-столбец наличных первичных факторов

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \geq 0, \quad r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix} \geq 0, \quad (9.2.13)$$

все элементы которых не отрицательны.

Цены в экономике, как и раньше, характеризуются двумя векторами-строками

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \geq 0, \\ w = (w_1, w_2, \dots, w_m) \geq 0, \quad (9.2.14)$$

найдена (или аппроксимирована) как степенной ряд матриц:

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots = (\alpha_{kj}),$$

где α_{kj} — количество продукта k , необходимого для производства одной единицы конечного выпуска продукта j . Тогда из (9.2.8) общий выпуск может быть записан в виде:

$$c + As + A^2s + \dots,$$

где c — конечный продукт, As — выпуск, необходимый для производства s , A^2s — выпуск, необходимый для производства As , и т. д.

где p_j — цена продукта j , w_i — цена фактора i и все цены не отрицательны, в то время как некоторые из них положительны. Предполагается, что экономика конкурентна, т. е. все экономические единицы (потребители и фирмы) пользуются заданными ценами.

Так как в условиях равновесия при совершенной конкуренции в производственном процессе не создается никакой прибыли, средние издержки производства любого товара должны быть больше или равны цене этого товара

$$\sum_{k=1}^n p_k a_{kj} + \sum_{i=1}^m w_i b_{ij} \geq p_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (9.2.15)$$

В левой части этого выражения показаны средние издержки, где $p_k a_{kj}$ — стоимость того количества товара k , которое необходимо для производства одной единицы товара j ; $w_i b_{ij}$ — стоимость фактора i , необходимого для производства одной единицы товара j . Суммирование по всем товарам и факторам дает издержки производства одной единицы продукта j . Используя матричное обозначение, условие неприбыльности записывается в виде

$$pA + wB \geq p. \quad (9.2.16)$$

Сгруппировав выражения, получаем

$$p(I - A) \leq wB. \quad (9.2.17)$$

Имея в виду предположения, сделанные нами относительно метода «затраты — выпуск» и совершенной конкуренции, задача общего равновесия может быть представлена как задача линейного программирования и задача, двойственная ей. Прямая задача заключается в максимизации значения конечного продукта (в терминах макроэкономики — максимизации национального продукта) путем выбора неотрицательных значений выпусков всех продуктов, удовлетворяющих ограничениям — уравнению Леонтьева и условиям спроса и предложения факторов. Прямая задача формулируется следующим образом:

$$\max_x pc \text{ при условии } x = Ax + c, \quad Bx \leq r, \quad x \geq 0, \quad (9.2.18)$$

где pc — значение конечного продукта

$$pc = \sum_{j=1}^n p_j c_j. \quad (9.2.19)$$

Эту задачу можно представить в виде задачи линейного программирования, исключив с при помощи уравнения Леонтьева

$$\max_x p(I-A)x \text{ при условии } Bx \leq r, x \geq 0. \quad (9.2.20)$$

В этой задаче переменными являются количества, а целевая функция характеризует ценность, поэтому, согласно рассуждениям, приведенным в разделах 4.4 и 5.3, в качестве переменных двойственной задачи выступают цены. Поставив двойственную задачу, как показано в разделе 5.1, получим

$$\min_w wr \text{ при условии } pA + wB \geq p, w \geq 0, \quad (9.2.21)$$

т. е. задачу минимизации стоимости первоначальных факторов (в терминах макроэкономики — минимизации национального дохода), заданной в виде

$$wr = \sum_{i=1}^m w_i r_i, \quad (9.2.22)$$

путем выбора неотрицательных значений цен факторов, удовлетворяющих условию о том, что производство любого продукта не прибыльно. В более общих обозначениях двойственная задача принимает вид

$$\min_w wr \text{ при условии } wB \geq p(I-A), w \geq 0, \quad (9.2.23)$$

Определив упорядоченные цены $\hat{p}$ как $p(I-A)$, сформулируем прямую и двойственную задачи

$$\max_x \hat{p}x \text{ при условии } Bx \leq r, x \geq 0, \quad (9.2.24)$$

$$\min_w wr \text{ при условии } wB \geq \hat{p}, w \geq 0. \quad (9.2.25)$$

Эти задачи проиллюстрированы для случая двух товаров и двух факторов ($m = n = 2$) на рис. 9.2.

Для того чтобы доказать существование равновесия, недостаточно описания механизма экономики. Нужно также описать систему предпочтений, заданную в виде функций спроса на товары и функций предложения факторов. Функции спроса и предложения получают путем обобщения индивидуальных функций потребителей того

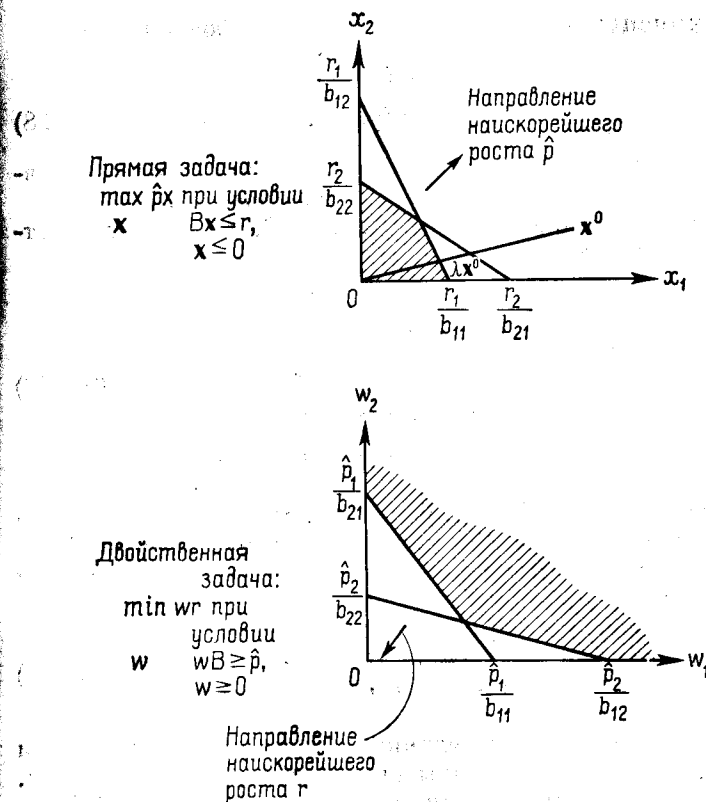


Рис. 9.2. Подход к теории общего равновесия с помощью методов линейного программирования.

же типа, которые были получены в результате максимизации полезности при бюджетном ограничении. Поэтому в общем виде функции спроса и предложения зависят от всех цен, включая цены товаров и оплату факторов. Спрос на j -й товар обозначается вектором

$$c_j = c_j(p_1, p_2, \dots, p_n; w_1, w_2, \dots, w_m), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (9.2.26)$$

а предложение i -го фактора — вектором

$$r_i = r_i(p_1, p_2, \dots, p_n; w_1, w_2, \dots, w_m), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (9.2.27)$$

В векторных обозначениях

$$\begin{aligned}c &= c(p, w) \\ r &= r(p, w).\end{aligned}\quad (9.2.28)$$

Предполагается, что эти функции однозначны и непрерывны для любых неотрицательных наборов цен.

Существование векторов p^* , w^* , x^* , r^* и c^* , удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned}x^* &= Ax^* + c^* \\ Bx^* &\leq r^* \\ p^*A + w^*B &\geq p^* \\ c^* &= c(p^*, w^*) \\ r^* &= r(p^*, w^*)\end{aligned}\quad (9.2.29)$$

при заданных A , B , $c(\cdot)$ и $r(\cdot)$, может быть доказано при помощи теоремы Какутани о неподвижной точке. Про- нормируем цены таким образом, чтобы в сумме они давали единицу

$$\sum_{j=1}^n p_j + \sum_{i=1}^m w_i = 1, \quad (9.2.30)$$

это законно, так как единицы, в которых измеряются цены, могут быть выбраны произвольно. Таким образом, нормированные цены являются точками множества S

$$S = \{(p, w) \mid \sum_{j=1}^n p_j + \sum_{i=1}^m w_i = 1, p \geq 0, w \geq 0\}, \quad (9.2.31)$$

непустого, компактного, выпуклого множества в $(m+n)$ - мерном евклидовом пространстве. Для доказательства строится полунепрерывное сверху отображение точек множества S в подмножество из S , которое по теореме Какутани о неподвижной точке имеет неподвижную точку. Эта точка и является равновесием, удовлетворяющим условиям (9.2.29).

Приступая к доказательству, рассмотрим множество нормированных цен (p^0, w^0) из S . Тогда по функциям спроса и предложения получим векторы требуемых товаров и предлагаемых факторов (c^0, r^0) . Конечный продукт

определяет собою общий выпуск, записанный в виде

$$x^0 = (I - A)^{-1} c^0. \quad (9.2.32)$$

Но эти уровни общего выпуска не обязательно совместимы с технологией задачи, поэтому все общие выпуски сводятся к определенной шкале множителем λ , где λx^0 лежит на границе производственной поверхности

$$\{(x, r) \mid Bx \leq r, x \leq 0\}. \quad (9.2.33)$$

Такое соизмерение может быть проиллюстрировано на верхнем графике на рис. 9.2, где заштрихованная область является производственной поверхностью. Если заданы B и $r^0 (= r(p^0, w^0))$, определена и производственная поверхность, и если $x^0 (= (I - A)^{-1} c(p^0, w^0))$ не лежит на границе заштрихованной области, то для нахождения общих выпусков будем смещать луч вверх (или вниз), пока он не достигнет границы в точке λx^0 , как показано.

Если точка λx^0 на производственной поверхности задана, найдется множество упорядоченных цен, для которых λx^0 является решением (9.2.24). Например, в случае, проиллюстрированном на рис. 9.2, вектор упорядоченных цен является нормалью к границе производственной поверхности в точке λx^0 . Он единственен, если λx^0 не вершина производственной поверхности. Однако, если же λx^0 является вершиной, то любой вектор упорядоченных цен, лежащий между нормальными, проведенными к прилежащим граням, удовлетворит задаче. Множество векторов всех относительных цен образует множество P

$$\begin{aligned}P &= \{p \mid \lambda x^0 \text{ максимизирует } p(I - A)x \\ &\text{при условии } Bx \leq r^0, x \geq 0\}.\end{aligned}\quad (9.2.34)$$

Пусть задан вектор p из P , тогда вектор относительных упорядоченных цен $\hat{p} (= p(I - A))$ совместно с B определяет область определения задачи (9.2.25), которая показана на нижнем графике рис. 9.2 как заштрихованная область. Множество всех возможных векторов оплат факторов, удовлетворяющих (9.2.25), когда p заключается в пределах P при заданном r^0 , составляет множество W

$$\begin{aligned}W &= \{w \mid w \text{ минимизирует } wr^0 \text{ при условии} \\ &wB \geq p(I - A), p \in P\}.\end{aligned}\quad (9.2.35)$$

Затем определяется множество (P, W) как множество нормированных векторов

$$(P, W) = \{(p, w) \in S \mid p \in P \text{ и } w \in W\}. \quad (9.2.36)$$

В итоге мы совершили длинную цепочку отображений

$$(p^0, w^0) \rightarrow (c^0, r^0) \rightarrow (x^0, r^0) \rightarrow (\lambda x, r^0) \rightarrow (P, W), \quad (9.2.37)$$

где первое отображение непрерывное, так как функции спроса и предложения непрерывны; второе непрерывно в силу того, что x^0 получено из c^0 путем линейного преобразования; третье отображение непрерывно, так как оно заключается в установлении масштаба x^0 ; четвертое отображение — это полунепрерывное сверху точечно-множественное отображение. Таким образом, отображение, совершенное из точки (p^0, w^0) в S в подмножество (P, W) множества S , является полунепрерывным сверху отображением точки непустого, компактного и выпуклого множества в подмножество этого множества. По теореме Какутани о неподвижной точке существует по крайней мере одна неподвижная точка, которая принадлежит подмножеству, полученному в результате этого отображения, т. е. существует (p^*, w^*) , такая, что

$$(p^*, w^*) \in (P, W). \quad (9.2.38)$$

Эти векторы (p^*, w^*) и соответственные количественные векторы $c^* = c(p^*, w^*)$, $r^* = r(p^*, w^*)$, $x^* = (I - A)^{-1} c^*$ являются равновесными, удовлетворяющими (9.2.29). Точка равновесия является единственной, если функции спроса удовлетворяют слабой аксиоме выявленного предпочтения.

Равновесие обладает свойством, что x^* является решением задачи линейного программирования (9.2.20), а w^* — решением двойственной задачи линейного программирования (9.2.21) при заданных A , B , $p = p^*$, $r = r^*$ и $c = c^*$. По теореме двойственности линейного программирования значения целевых функций в этих точках равны между собой

$$p^* c^* = w^* r^*, \quad (9.2.39)$$

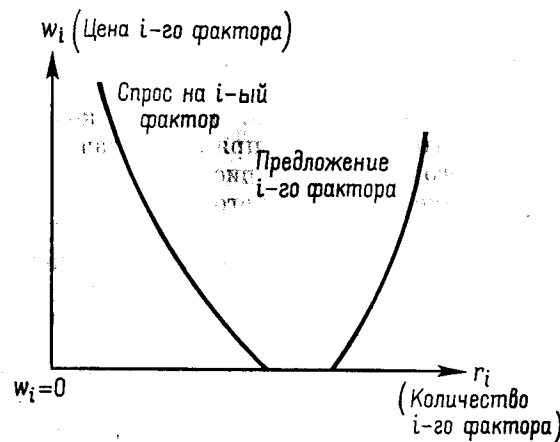
где $p^* c^*$ — максимальное значение конечного спроса, а $w^* r^*$ — минимальная стоимость первоначальных факторов. Таким образом, по теореме двойственности общее значение произведенного конечного продукта (нацио-

нального продукта) равно общей плате за факторы производства (национальному доходу)¹.

Вторая важная теорема линейного программирования, теорема о дополняющей нежесткости, утверждает, что если ограничение удовлетворяется в точке решения как строгое неравенство, то соответствующие двойственные переменные в оптимальном плане будут равны нулю. Таким образом, для прямой задачи (9.2.18) имеем:

$$\text{если } \sum_j b_{ij} x_j^* < r_i, \text{ то } w_i^* = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (9.2.40)$$

Это условие означает, что если общий спрос на фактор меньше, чем наличное предложение, то оптимальная оплата этого фактора равна нулю. Поэтому подход линейного



Р и с. 9.3. Если предложение фактора превышает спрос на него при ненулевой плате, то равновесная оплата этого фактора равна нулю.

программирования к общему равновесию распространяется не только на дефицитные факторы, обладающие положительной оплатой, но также и на свободные факторы, оплата которых равна нулю. Условие равенства цены нулю, когда при любой ненулевой цене предложение превышает спрос, еще встретится в других формулировках задачи общего равновесия. Этот случай проиллюстрирован на рис. 9.3.

¹ К аналогичному заключению мы пришли в предыдущем разделе в уравнении [9.1.25].

Условия дополняющей нежесткости для двойственной задачи записываются следующим образом:

$$\text{если } \sum_k p_k a_{kj} + \sum_i w_i^* b_{ij} > p_j, \text{ то } x_j^* = 0. \quad (9.2.41)$$

Это означает, что, если товар произведен с убытком, т. е. средние издержки его производства превышают цену, тогда оптимальный выпуск этого продукта равен нулю, т. е. товар не производится. Таким образом, подход линейного программирования к общему равновесию охватывает не только производимые товары (при средних издержках производства, равных цене), но и товары, которые не производятся.

Методы линейного программирования также применяются при сравнительном анализе показателей общего равновесия [22—26]. Случай, иллюстрирующий два фактора и два товара, изображен на рис. 9.4, который основан на рис. 9.2.

Предположим, что ресурсы, цены и коэффициенты затрат таковы, что решение прямой задачи находится в точке α верхнего графика на рис. 9.4. Пусть затем произошло расширение объема второго ресурса r_2 , показанное геометрически параллельным переносом одной из линий ограничения до пунктирной линии. Новое решение находится теперь в вершине α' , в которой выпуск товара 2 возрос, а выпуск товара 1 уменьшился. Основным результатом является *теорема Рибчинского*, которая утверждает, что возрастание одного фактора при сохранении всех остальных параметров неизменными приводит к увеличению выпуска тех товаров, которые используют этот фактор относительно интенсивно, и к уменьшению объема выпуска товаров, использующих этот фактор недостаточно интенсивно. В случае, изображенном на рис. 9.4, выпуск x_2 возрастает, в то время как выпуск x_1 уменьшается, так как $(b_{22}/b_{12}) > (b_{21}/b_{11})$, т. е. товар 2 использует фактор 2 относительно интенсивно.

Теперь рассмотрим нижний график на рис. 9.4, на котором ресурсы, цены и коэффициенты затрат таковы, что решение находится в точке β . Предположим, цена на второй товар p_2 возросла. Так как

$$\begin{aligned} \hat{p}_1 &= (1 - a_{11}) p_1 - a_{12} p_2 \\ \hat{p}_2 &= -a_{12} p_1 + (1 - a_{22}) p_2, \end{aligned} \quad (9.2.42)$$

то увеличение p_2 приводит к уменьшению $\hat{p}_1$ и увеличению

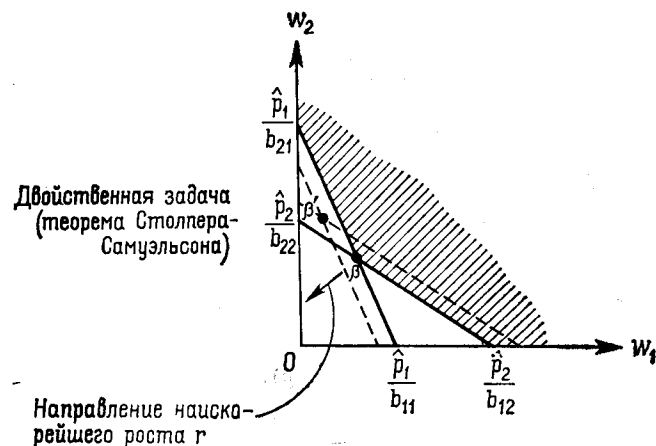
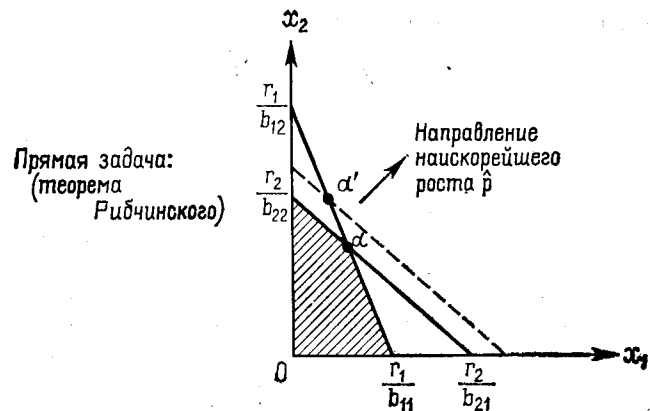


Рис. 9.4. Сравнительные показатели подхода к теории общего равновесия с помощью методов линейного программирования.

$\hat{p}_2$, что показано геометрически двумя пунктирными линиями. В точке нового решения в вершине β' произошло увеличение цены второго фактора и уменьшение цены первого. Основным результатом является *теорема Столпера — Самуэльсона*, которая утверждает, что повышение цены любого товара при неизменных остальных параметрах приводит к повышению цен тех факторов, которые используются относительно интенсивно в производстве этого товара, и к снижению цен тех факторов, которые

в производстве товара используются относительно неинтенсивно. В случае, изображенном на рис. 9.4, повышение p_2 приводит к повышению w_2 и снижению w_1 , так как $(b_{22}/b_{12}) > (b_{21}/b_{11})$, как и раньше. Очевидна двойственная природа этих двух теорем, как показано в случае $m = 2, n = 2$.

9.3. НЕОКЛАССИЧЕСКИЙ ПОДХОД. ИЗБЫТОЧНЫЙ СПРОС

Неоклассический подход к общему равновесию, связанный с использованием избыточного спроса, соединяет некоторые черты классического подхода и методов линейного программирования. При этом не делается никаких допущений относительно технологии, а для доказательства существования равновесия используется теорема о неподвижной точке [27, 28].

Рассмотрим экономику, состоящую из потребителей и фирм, которая производит n товаров $x_1, x_2, \dots, x_n$. В отличие от термина, введенного раньше, здесь товары могут включать продукты, факторы и даже такие товары, которые являются одновременно и продуктами, и факторами (например, электричество). Цены товаров характеризуются вектором-строкой

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_n). \quad (9.3.1)$$

Для любого неотрицательного набора цен существует функция спроса на товар j

$$x_j^d = x_j^d(p), \quad (9.3.2)$$

полученная путем обобщения индивидуальных функций спроса потребителей и фирм. Аналогично для любого неотрицательного набора цен существует функция предложения товара j

$$x_j^s = x_j^s(p), \quad (9.3.3)$$

полученная обобщением индивидуальных функций предложения потребителей и фирм. Избыточный спрос на продукт j получается вычитанием предложения из спроса.

$$E_j(p) = x_j^d(p) - x_j^s(p), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (9.3.4)$$

Избыточные спросы на n продуктов образуют вектор-столбец

$$E(p) = (E_1(p), E_2(p), \dots, E_n(p))'. \quad (9.3.5)$$

Равновесие определяется как набор неотрицательных цен p^* , таких, что все избыточные спросы не положительны, и цена на любой товар равна нулю, если избыточный спрос на этот товар отрицательный (как на рис. 9.3)

$$\begin{aligned} p^* &\geq 0 \\ E(p^*) &\leq 0, \end{aligned} \quad (9.3.6)$$

если $E_j(p_j^*) < 0$, тогда $p_j^* = 0$.

Существование такого равновесия можно доказать, если относительно функций избыточного спроса введены некоторые предпосылки. Во-первых, предполагается, что функции избыточного спроса однозначны и непрерывны. Во-вторых, функции избыточного спроса считаются ограниченными снизу

$$E(p) \geq b \text{ для всех } p, \quad (9.3.7)$$

где b — вектор-столбец, состоящий из конечных компонент. Согласно этому предположению, предложение любого продукта всегда ограничено. В-третьих, предполагается, что функции избыточного спроса однородны нулевой степени относительно всех цен

$$E(\alpha p) = E(p) \text{ для всех } \alpha > 0. \quad (9.3.8)$$

Следовательно, имеют значение только относительные цены. Наконец, считается, что функции избыточного спроса удовлетворяют закону Вальраса в том смысле, что рыночное значение избыточного спроса равно нулю

$$pE(p) = \sum_{j=1}^n p_j E_j(p) = 0 \text{ для всех } p \geq 0, \quad (9.3.9)$$

поэтому рыночное значение спроса равно рыночному значению предложения при любых неотрицательных ценах.

При этих допущениях существование равновесия следует из теоремы Брауэра о неподвижной точке. Используя предпосылку об однородности, можно пронормировать цены так, чтобы их сумма равнялась единице. Таким образом, вектор цен принадлежит симплексному множеству S

$$S = \{p \mid \sum_{j=1}^n p_j = 1, p \geq 0\}. \quad (9.3.10)$$

Рассмотрим некоторый набор цен p из S . Функции избыточного спроса дают набор значений избыточного спроса

Е (p). Для этих функций избыточного спроса определим новые цены $\bar{p}$, так что

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_j &= p_j, \text{ если } E_j(p) = 0 \\ \bar{p}_j &= p_j + \Delta, \text{ если } E_j(p) > 0 \\ \bar{p}_j &= \max(0, p_j - \Delta), \text{ если } E_j(p) < 0 \end{aligned} \right\} j = 1, 2, \dots, n, \quad (9.3.11)$$

где Δ — малая положительная константа. Новые цены упорядочены так, что в сумме они равны единице и, следовательно, принадлежат множеству S . Таким образом, было совершено преобразование

$$p \rightarrow E(p) \rightarrow \bar{p}, \quad (9.3.12)$$

где $\bar{p}$ получаются из $E(p)$ следующим образом: цены остаются неизменными при нулевом избыточном спросе; цены увеличиваются, если избыточный спрос положителен; и снижаются, но не ниже нуля, если избыточный спрос отрицателен. Принимая во внимание предположение непрерывности и ограниченности, мы имеем непрерывное преобразование непустого компактного выпуклого множества S в себя. Поэтому, согласно теореме Брауэра о неподвижной точке, существует неподвижная точка, которая остается неизменной в результате преобразования

$$p^* \rightarrow E(p^*) \rightarrow p^*. \quad (9.3.13)$$

Но процесс упорядочения остается неизменным только в том случае, если все значения избыточного спроса не положительны и любой продукт с отрицательным значением избыточного спроса обладает нулевой ценой, т. е. только тогда, когда p^* представляет собой равновесие, определенное в (9.3.6).

Надо отметить, что если из этих предпосылок относительно функций избыточного спроса сразу следует существование равновесия, то для доказательства его единственности их недостаточно. На самом деле, равновесие является единственным, если, как и раньше, общие функции спроса удовлетворяют слабой аксиоме выявленного предпочтения [12].

Другое доказательство единственности при предположении о дифференцируемости функций избыточного спроса основано на использовании матрицы Якоби. Выберем в качестве единицы счета товар n и предположим, что избыточный спрос на этот товар стремится к бесконечности, если его цена равна нулю независимо от цен на другие товары. Тогда матрица Якоби этой нормированной системы может быть представлена в виде

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial p_1} & \frac{\partial E_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial E_1}{\partial p_{n-1}} \\ \frac{\partial E_2}{\partial p_1} & \frac{\partial E_2}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial E_2}{\partial p_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial E_{n-1}}{\partial p_1} & \frac{\partial E_{n-1}}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial E_{n-1}}{\partial p_{n-1}} \end{pmatrix}. \quad (9.3.14)$$

Равновесие единственно, если главные миноры матрицы J меняются в знаке, при этом главные миноры четных (нечетных) номеров строк и столбцов J должны быть положительными (отрицательными)¹.

9.4. УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ

Если мы предположим, что равновесие существует, возникает проблема его действительного достижения. Централизованное вычисление равновесия, основанное на использовании таких данных, как предпочтения, технология, ресурсы и т. п., вряд ли возможно, так как требуется огромный объем памяти и велики трудности расчетов. Другой возможный выход — децентрализованное итеративное вычисление, ведущее к использованию временных траекторий для объемов и цен. Если эти временные траектории в конечном счете достигают равновесных значений, тогда лежащий в основе динамический процесс считается *устойчивым*.

Используя обозначения предыдущего параграфа, обозначим через x вектор-столбец, состоящий из n товаров

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)', \quad (9.4.1)$$

¹ См. [28]. Хикс [1] развил это условие при исследовании устойчивости, поэтому иногда это условие называют «условием устойчивости Хикса».

а через p — вектор-строку цен товаров

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_n). \quad (9.4.2)$$

Здесь под товарами подразумеваются как продукты, так и факторы. Предположим, равновесие существует в точке p^* . Равновесие называется *локально устойчивым*, если оно в конечном счете достигается, начиная с некоторого набора цен, достаточно близкого к точке равновесия. Пусть $p(t)$ — вектор цен в момент t , тогда равновесие в точке p^* является локально устойчивым, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p^* \text{ при заданных } |p(t_0) - p^*| < \delta, \quad (9.4.3)$$

где t_0 — начальный момент времени, а $|p(t_0) - p^*|$ — евклидова норма в пространстве цен, неотрицательном ортанте в E^n . Равновесие называется *глобально устойчивым*, если оно в конечном счете достигается независимо от начальной точки

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p^* \text{ для всех } p(t_0). \quad (9.4.4)$$

Глобальная устойчивость предполагает локальную (и единственное равновесие); обратное неверно.

Классическим методом решения проблемы устойчивости является процесс «нащупывания» Вальраса, представляющий собой итеративное решение, полученное в результате использования закона спроса и предложения для конкурентного рынка [10, 11, 29, 30, 31]. Для каждого рынка Вальрас предлагает аукционера, который в отличие от большинства акционеров не представляет ни покупателя, ни продавца. Аукционер Вальраса реагирует на неравновесие на рынке через упорядочение цен. Таким образом, в действительности аукционер является антропоморфическим представлением самого рынка. Правила установления упорядоченных цен совпадают с правилами процесса «нащупывания»: цены поднимаются, если общий рыночный спрос превышает общее рыночное предложение; цены понижаются, если общего рыночного спроса не хватает для покрытия общего рыночного предложения; и цены остаются неизменными, если общий рыночный спрос равен общему рыночному предложению. В терминах функций избыточного спроса процесс «нащупывания» должен повысить (понизить, оставить неизменными) цены,

если избыточный спрос положителен (отрицателен, равен нулю) ¹

$$\frac{dp_j}{dt} = \dot{p}_j \begin{cases} > \\ < \\ = \end{cases} 0, \text{ если } E_j(p) \begin{cases} > \\ < \\ = \end{cases} 0, j=1, 2, \dots, n. \quad (9.4.5)$$

Индивидуальные покупатели и продавцы могут перезаключать договоры после изменения цен, но сделка не должна совершиться, пока не будет достигнуто равновесие. Вальрас предположил, что процесс «нащупывания» будет сходиться к равновесию, даже при произвольном начальном наборе цен, т. е. что этот процесс глобально устойчив. Это предположение Вальраса не является справедливым, если не сделать дополнительных оговорок. Например, при процессе «нащупывания» система может бесконечно колебаться около точки равновесия.

Современные методы решения проблемы устойчивости рассматривают системы «нащупывания», в которых траектории цен задаются формулой

$$\dot{p}_j(t) = f_j(E_j(p(t))), \quad (9.4.6)$$

$$f_j(0) = 0, f'_j(\cdot) > 0; j = 1, 2, \dots, n, \quad (9.4.7)$$

т. е. скорость изменения всех цен во времени — возрастающая функция избыточного спроса на те товары, объем которых стремится к нулю, если равен нулю избыточный спрос ². Далее предполагается, что n функций $f_j(\cdot)$ являются непрерывными, однородными нулевой степени в отношении всех цен и неотрицательными при нулевых ценах

$$f_j(\cdot) \geq 0 \text{ при } p_j = 0, \quad (9.4.8)$$

т. е. цены не могут стать отрицательными. Важным частным случаем являются линейные системы «нащупывания», в которых изменение цен соответствует избыточному спросу

$$\dot{p}_j = E_j(p), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (9.4.9)$$

Анализ локальной устойчивости равновесия основан на аппроксимации скорости изменения цен

$$\dot{p}(t) = (\dot{p}_1(t), \dots, \dot{p}_n(t)) \quad (9.4.10)$$

¹ Заметим, что преобразование, определенное в (9.3.11), является процессом «нащупывания» без явных элементов динамики, которые были введены здесь.

² См. [2, 32, 33, 34, 35, 37, 28, 7]. Процесс, противоположный процессу «нащупывания», в котором имеют место некоторые сделки при неравновесных ценах, рассматривается в [36, 38, 39].

около равновесия. Равновесной точкой p^* является набор цен, который не изменяется во времени

$$\dot{p} = 0 \text{ в точке } p = p^*, \quad (9.4.11)$$

а для процесса «нащупывания» равновесие требует нулевого избыточного спроса для каждого товара

$$E_j(p^*) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (9.4.12)$$

Пусть имеется линейный процесс «нащупывания»

$$\dot{p}' = E(p) = (E_1(p), \dots, E_n(p)) \quad (9.4.13)$$

с точкой равновесия в p^* ; разложим $E(p)$ в ряд Тейлора в окрестности точки p^*

$$\dot{p}' = E(p^*) + \frac{\partial E}{\partial p}(p^*)(p - p^*) + \dots, \quad (9.4.14)$$

где $\partial E / \partial p$ — матрица Якоби

$$\frac{\partial E}{\partial p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial p_1} & \frac{\partial E_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial E_1}{\partial p_n} \\ \frac{\partial E_2}{\partial p_1} & \frac{\partial E_2}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial E_2}{\partial p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial E_n}{\partial p_1} & \frac{\partial E_n}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial E_n}{\partial p_n} \end{pmatrix}, \quad (9.4.15)$$

оцененная в точке равновесия. Так как p^* — точка равновесия, то

$$E(p^*) = 0, \quad (9.4.16)$$

и, определив π как вектор разностей между реальными и равновесными ценами

$$\pi = p - p^*, \quad (9.4.17)$$

мы придадим разложению (9.4.14), отбрасывая все члены высших порядков, следующий вид:

$$\dot{\pi} = \frac{\partial E}{\partial p}(p^*) \pi. \quad (9.4.18)$$

Эта система дифференциальных уравнений устойчива, т. е. π стремится к нулю тогда, и только тогда, когда все характеристические корни матрицы Якоби имеют отрицательные действительные части. Это условие выполняется,

если все товары являются явно заменяемыми, т. е. увеличение цены на любой продукт при неизменных остальных ценах приводит к увеличению избыточного спроса на любой другой продукт

$$\frac{\partial E_i}{\partial p_j}(p) > 0 \text{ для всех } p, \quad i \neq j. \quad (9.4.19)$$

Таким образом, точка равновесия является локально устойчивой, если все продукты являются явно заменяемыми.

На самом деле глобальная устойчивость может быть обеспечена, если товары явно заменяемы или если функции избыточного спроса удовлетворяют слабой аксиоме выявленного предпочтения. Доказательства глобальной устойчивости основаны на том факте, что расстояние до равновесия со временем снижается до нуля. Например, рассмотрим квадратичное евклидово расстояние между вектором реальных и равновесных цен

$$D(t) = \sum_{j=1}^n \pi_j^2(t) = \sum_{j=1}^n (p_j(t) - p_j^*)^2 = (p(t) - p^*)(p(t) - p^*)'. \quad (9.4.20)$$

Дифференцируя по времени, получим

$$\dot{D}(t) = 2(p(t) - p^*) \dot{p}(t) = 2(p(t) - p^*) E(p(t)). \quad (9.4.21)$$

Но, согласно закону Вальраса,

$$p(t) E(p(t)) = 0, \quad (9.4.22)$$

поэтому

$$\dot{D}(t) = -2p^* E(p(t)). \quad (9.4.23)$$

Теперь рассмотрим, например, слабую аксиому выявленного предпочтения, примененную к функциям избыточного спроса:

$$p^1 E(p^1) \geq p^1 E(p^2) \text{ влечет} \\ p^2 E(p^1) > p^2 E(p^2). \quad (9.4.24)$$

При $p^1 = p$ и $p^2 = p^*$ верхнее неравенство удовлетворяется. Нижнее неравенство дает

$$p^* E(p) > p^* E(p^*) = 0, \quad (9.4.25)$$

и при $p \neq p^*$

$$\dot{D}(t) = -2p^* E(p) < 0. \quad (9.4.26)$$

Таким образом, расстояние между фактическими и равновесными ценами уменьшается во времени, что и означает глобальную устойчивость.

Наконец, если система нормирована (например, $p_n = 1$), она является глобально устойчивой в том случае, если функция Якоби избыточного спроса имеет доминирующую диагональ, иначе говоря, каждый диагональный элемент отрицателен и превышает по абсолютной величине сумму всех остальных элементов строки

$$\frac{\partial E_j}{\partial p_j} < 0 \quad \text{и} \quad \left| \frac{\partial E_j}{\partial p_j} \right| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{\partial E_j}{\partial p_i}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (9.4.27)$$

Это условие означает, что изменения цен на данный товар влияют на избыточный спрос в большей степени, чем изменения любых других цен.

9.5. МОДЕЛЬ РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ ЭКОНОМИКИ ФОН НЕЙМАНА

Модель фон Неймана — это модель расширяющейся экономики, в которой все выпуски и затраты возрастают в одинаковой пропорции¹. Модель замкнута в том смысле, что все выпуски одного периода становятся затратами следующего периода; первичные факторы в ней не используются. Так, потребление рассматривается как затраты в технологическом процессе, производящем труд, который будет использоваться в производстве следующего периода. Поэтому все затраты являются воспроизводимыми, а первичные ресурсы не имеют места.

Нейман описывает экономику, характеризуемую линейной технологией производственных процессов, которая состоит из p процессов; с их помощью n видов затрат товаров превращается в n видов продукции. Технология описывается двумя матрицами размера $n \times p$ единичных уровней затрат и выпусков соответственно

¹ См. [40, 41, 42, 7]. Динамический материал представлен в этом и предыдущем разделах, а не в третьей части книги потому, что он тесно связан с темой данной главы.

$$\begin{aligned} A &= (a_{jk}) \geq 0 \\ B &= (b_{jk}) \geq 0, \end{aligned} \quad (9.5.1)$$

где a_{jk} — затраты продукта j , используемого при единичном уровне интенсивности k -го процесса, а b_{jk} — выпуск продукта j , произведенного k -м процессом при его единичной интенсивности, $j = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, p$. Эти коэффициенты затрат и выпуска, конечно, не отрицательны. Далее предполагается, что для каждого процесса необходимы затраты некоторого продукта, т. е. для каждого k существует некоторое j , такое, что

$$a_{jk} > 0 \quad (9.5.2)$$

и каждый продукт может быть произведен каким-либо производственным процессом¹, т. е.

для каждого j существует некоторое k , такое, что

$$b_{jk} > 0. \quad (9.5.3)$$

Из этих предположений вытекает требование, что каждый столбец матрицы A и каждая строка B должны иметь по крайней мере один положительный элемент.

Интенсивности процессов обозначаются вектором-столбцом

$$y = y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_p(t))' \geq 0, \quad (9.5.4)$$

где $y_k(t)$ — уровень интенсивности процесса k в момент t , $k = 1, 2, \dots, p$. Интенсивности не отрицательны и могут быть пронормированы так, что в сумме дают единицу

$$0 \leq y_k \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (9.5.5)$$

$$\sum_{k=1}^p y_k = 1.$$

Цены продуктов определяются вектором-строкой

$$p = p(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)) \geq 0, \quad (9.5.6)$$

¹ В своей работе Нейман [40] сделал более сильное предположение:

$$a_{jk} + b_{jk} > 0, \quad \text{для всех } j, k,$$

т. е. любой продукт является либо затратами, либо выпуском в каждом производственном процессе. Более слабое предположение, которое используется здесь, было предложено Кемени, Моргенштерном и Томпсоном [41].

где $p_j(t)$ — цена продукта j в момент t ; $j = 1, 2, \dots, n$. Цены не отрицательны и могут быть пронормированы так, что в сумме дают единицу

$$0 \leq p_j \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n p_j = 1. \quad (9.5.7)$$

Затраты продукта j в процессе k равны $a_{jk}y_k$, поэтому общие затраты продукта j в момент t будут $\sum_{k=1}^p a_{jk}y_k(t)$; вектор общих затрат равен $Ay(t)$. Аналогично общий выпуск продукта j в момент t равен $\sum_{k=1}^p b_{jk}y_k(t)$ и вектор общих выпусков составляет $By(t)$. Предполагается, что производственные процессы требуют один полный период времени для выпуска продукции, поэтому затраты любого продукта не могут превышать выпуска этого продукта в предыдущий период

$$\sum_{k=1}^p a_{jk}y_k(t+1) \leq \sum_{k=1}^p b_{jk}y_k(t), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (9.5.8)$$

или в матричном обозначении

$$Ay(t+1) \leq By(t). \quad (9.5.9)$$

Однако, если для какого-либо продукта выполняется строгое неравенство, тогда, поскольку предложение превышает спрос, предполагается, что цена падает до нуля, т. е. если

$$\sum_{k=1}^p a_{jk}y_k(t+1) < \sum_{k=1}^p b_{jk}y_k(t), \quad (9.5.10)$$

то $p_j(t) = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Умножив (9.5.10) на вектор-строку цен, получим

$$p(t)Ay(t+1) = p(t)By(t). \quad (9.5.11)$$

Если в экономике имеет место совершенная конкуренция, то при равновесии нигде не может быть получена прибыль. Таким образом, для каждого процесса значение выпуска не может превышать значения затрат предыдущего периода

$$\sum_{j=1}^n p_j(t+1)b_{jk} \leq \sum_{j=1}^n p_j(t)a_{jk}, \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad (9.5.12)$$

или в матричном обозначении

$$p(t+1)B \leq p(t)A. \quad (9.5.13)$$

Если для k -ого процесса выполняется строгое неравенство, то, так как прибыли являются отрицательными величинами, предполагается нулевая интенсивность, т. е. если

$$\sum_{j=1}^n p_j(t+1)b_{jk} < \sum_{j=1}^n p_j(t)a_{jk}, \quad \text{то}$$

$$y_k(t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p. \quad (9.5.14)$$

Таким образом,

$$p(t+1)By(t) = p(t)Ay(t). \quad (9.5.15)$$

Предполагается, что в экономике наблюдается сбалансированный рост в том смысле, что все уровни интенсивности возрастают одинаковыми темпами λ

$$y_k(t+1) = (1 + \lambda)y_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, p. \quad (9.5.16)$$

В матричном обозначении решение этой системы разностных уравнений выглядит следующим образом:

$$y(t) = (1 + \lambda)^{t-t_0} y(t_0), \quad (9.5.17)$$

где вектор $y(t_0)$ — вектор интенсивностей в момент t_0 . Константа λ называется *темпом сбалансированного роста* экономики.

Предполагается, что цены всех товаров снижаются одинаковыми темпами ρ

$$p_j(t+1) = \frac{p_j(t)}{1+\rho}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (9.5.18)$$

В матричном обозначении решение этой системы разностных уравнений примет следующий вид:

$$p(t) = (1 + \rho)^{t_0-t} p(t_0), \quad (9.5.19)$$

где $p(t_0)$ — вектор цен в момент t_0 . Постоянная ρ обозначает *норму процента* в экономике, которая характеризует заинтересованность во владении деньгами, потому что определенная сумма денег, на которую можно приобрести данное количество какого-либо товара в момент t , даст возможность купить в $(1 + \rho)$ раз большее количество того же товара в момент $t + 1$.

Подставляя (9.5.17) и (9.5.19) в (9.5.9), (9.5.11), (9.5.13) и (9.5.15), получим, что в модели для всех t

$$\begin{aligned} (1 + \lambda) A y(t) &\leq B y(t), \text{ но} \\ (1 + \lambda) p(t) A y(t) &= p(t) B y(t) \\ (1 + \rho) p(t) A &\geq p(t) B, \text{ но} \\ (1 + \rho) p(t) A y(t) &= p(t) B y(t). \end{aligned} \quad (9.5.20)$$

При этих условиях существует максимальный темп сбалансированного роста λ^* и минимальная норма процента ρ^* , которые равны между собой¹.

$$\lambda^* = \rho^* = \frac{p(t) B y(t)}{p(t) A y(t)} - 1. \quad (9.5.21)$$

Это равновесие справедливо для всех периодов времени t при соблюдении предположения о том, что начальные точки $p(t_0)$ и $y(t_0)$ удовлетворяют (9.5.21). Траектория, соответствующая максимальному сбалансированному росту, известна под названием *луча фон Неймана*.

ЗАДАЧИ

9-А. Экономика чистого обмена отличается тем, что в ней нет производства. Каждый потребитель имеет определенный начальный (до обмена) запас каждого потребительского товара.

1. Описать условия равновесия в общем случае H потребителей и n потребительских товаров. Будет ли в этом случае число уравнений совпадать с числом неизвестных?
2. Описать условия равновесия в случае $H = n = 2$, при котором каждый потребитель имеет квадратичную функцию полезности.

9-Б. Рассмотрим случай экономики чистого обмена при $H = n = 3$. Начальное распределение характеризуется матрицей

¹ См. [40]. Решение λ^* ($=\rho^*$) является единственным, если справедлива предпосылка фон Неймана из примечания на стр. 311. Если принята предпосылка Кемени, Моргенштерна и Томпсона [14], то существует по крайней мере одно решение, но не больше $\min(p, n)$ решений.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

и дана матрица предельной полезности

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} & \frac{b-x_2}{x_2^2} & 2 \frac{c-x_3}{x_3^2} \\ \frac{1}{x_1^2} & \frac{1}{x_2^2} & 0 \\ \frac{1}{x_1^2} & 0 & \frac{1}{x_3} \end{pmatrix},$$

в которой строки относятся к потребителям, а столбцы — к товарам. Найти равновесные цены и конечное распределение. Описать обмен словесно. Является ли решение разумным?

9-В. Экономисты классической школы молчаливо предполагали, что для существования равновесия необходимо и достаточно, чтобы число уравнений совпадало с количеством неизвестных. Показать на алгебраическом и геометрическом примерах, что это не является ни необходимым, ни достаточным условием.

9-Г. Классический подход, описанный в разделе 9.1, был основан на предположении, что каждая фирма производит все товары и использует факторы всех видов и что каждый потребитель потребляет все товары и продает все факторы. Ослабление этих предположений ведет к появлению неравенств в условиях равновесия.

1. Сформулировать условия, состоящие из неравенств, и показать, что среди оставшихся соотношений неравенств не будет.
2. Что будет представлять собой закон Вальраса в этом случае?

9-Д. В *паутинообразной модели* спрос зависит от текущих цен, а предложение зависит от цен в предыдущие периоды (например, сельскохозяйственные рынки, на которых предложение зависит от посевной площади, а она в свою очередь зависит от цен, действующих в момент сева). В каждом периоде предложение должно равняться спросу.

1. Показать на графике возможность циклического изменения цены и выпуска.

2. При каких условиях цена будет стремиться к устойчивому равновесию?

3. Обобщить результат для n рынков.

9-Е. Если A — матрица типа «затраты — выпуск», то все главные миноры $(I - A)$ положительны (условия Хоукинса — Саймона).

1. Сформулировать эти условия и дать их экономическую интерпретацию для экономики, производящей 2 товара.

2. Показать, что из условий Хоукинса — Саймона следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A^t = 0$$

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots$$

9-Ж. В экономике с двумя товарами и тремя ресурсами технология «затраты — выпуск» описывается матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Наличные ресурсы являются неэластичными и задаются вектором

$$r = (10, 12, 16).$$

1. Показать на графике множество возможных выпусков и множество всех возможных значений конечного спроса.

2. Найти равновесные цены, объемы и платы за пользование факторами, если конечный спрос на второй товар имеет вид

$$c_2 = \frac{13}{3} - p_2,$$

а первый товар служит единицей счета.

9-З. Для доказательства существования конкурентного равновесия с линейной технологией, как изложено в разделе 9.2, показать, что

1. Преобразование $(\lambda x^0, r^0) \rightarrow (P, W)$ является непрерывным сверху.

2. $\lambda = 1$ для неподвижной точки.

3. Равновесие является единственным, когда функции спроса удовлетворяют слабой аксиоме выявленного

предпочтения, а ресурсы полагаются неэластичными.

9-И. Как влияют изменения в уровнях ресурсов на их оплату в модели общего равновесия, построенной на основе линейного программирования? Каково влияние изменения цен товаров на выпуск продукции? Проиллюстрировать, как это сделано на рис. 9.4.

9-К. В экономике с тремя продуктами функции избыточного спроса для двух товаров имеют следующий вид:

$$E_1 = -p_1 + p_2 + 1$$

$$E_2 = p_1 - 2p_2 + 2,$$

а третий продукт служит единицей счета.

1. Каков избыточный спрос на третий продукт?

2. Как выглядит матрица Якоби функций избыточного спроса?

3. Найти равновесие. Устойчиво ли оно?

9-Л. Показать, что в случае, если потребитель h характеризуется логарифмической функцией полезности

$$U^h = \sum_{j=1}^n \alpha_j^h \log c_j^h, \quad h = 1, 2, \dots, H$$

$$\alpha_j^h > 0, \text{ для всех } j, h; \sum_j \alpha_j^h = 1 \text{ для всех } h,$$

то при фиксированном предложении все товары являются явно заменяемыми. Найти равновесные цены.

9-М. Допустим, индивидуум имеет функцию полезности для избыточного спроса на 2 товара экспоненциального вида

$$U = -a_1 \exp(-b_1 E_1) - a_2 \exp(-b_2 E_2),$$

где a_1, a_2, b_1 и b_2 — положительные константы. Он максимизирует полезность при соблюдении бюджетного ограничения

$$p_1 E_1 + p_2 E_2 = 0,$$

где p_1 и p_2 — цены. Найти оптимальный избыточный спрос как функцию соотношения цен p_2/p_1 . Являются ли товары явно заменяемыми? При каком соотношении цен существует экономическое равновесие?

9-Н. Примером экономики с неустойчивым равновесием может служить экономика чистого обмена с тремя потре-

бителями и тремя товарами [43]. Начальные запасы определяются матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а функции полезности имеют вид

$$U^1 = \min (x_1^1, x_2^1)$$

$$U^2 = \min (x_2^2, x_3^2)$$

$$U^3 = \min (x_1^3, x_3^3).$$

1. Найти функции спроса и функции избыточного спроса для потребителя 1.
2. Найти вектор рыночного избыточного спроса и показать, что равновесие существует и является единственным, когда все цены равны между собой.
3. Предполагая линейную систему «нащупывания», в которой уровень обмена при каждой цене равен избыточному спросу, показать, что равновесие потребителя 2 является устойчивым.

9-О. Матрица Якоби избыточного спроса $J = \frac{\partial E(p)}{\partial p}$

является хиксианом, если ее главные миноры меняются в знаке, и является устойчивой, если ее характеристические корни имеют отрицательные действительные части [1, 2, 44, 45].

1. Показать, что если J — симметричная матрица, то условия того, что J является хиксианом, совпадают с условиями того, что J устойчива.
2. Показать, что если все товары являются явно заменяемыми, то J является устойчивым хиксианом.
3. Показать, что если $\frac{J+J'}{2}$ отрицательно определена, то J является устойчивым хиксианом.

9-П. Доказать, что дискретная система «нащупывания»

$$p(t+1) = \max(0, p(t) + \rho E(p(t))), \quad p(t_0) > 0$$

является устойчивой при условии, что функции избыточного спроса непрерывны, однородны нулевой степени и удовлетворяют слабой аксиоме выявленного предпочтения и ρ — достаточно малая положительная величина.

Что случится, если ρ не является «достаточно малой»?
9-Р. Показать, что если все товары являются явно заменяемыми, то следующая норма в пространстве цен

$$D_m(t) = \max_j \left(\left| \frac{p_j(t) - p_j^*(t)}{p_j^*(t)} \right| \right)$$

есть монотонно убывающая функция времени, если $p = \alpha p^*$, где $\alpha > 0$.

9-С. В одной модели фон Неймана

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1,4 & 0 \\ 0 & 1,8 \end{pmatrix}.$$

1. Описать технологию словесно.
2. Сформулировать два возможных решения для цен, интенсивностей и коэффициентов роста и инфляции.