Глава 8

Теория фирмы

Вторым основным понятием микроэкономической теории является *фирма*, определяемая как некоторая организация, производящая затраты экономических факторов, таких, как земля, труд и капитал, для изготовления продукции и услуг, которые она продает потребителям или другим фирмам [1]. Задача рационального ведения хозяйства, с которой встречается фирма (см. табл. 1.2), заключается в определении количества продукции и в расчете необходимых для ее выпуска затрат с учетом технологической связи между ними и заданными ценами на затраты (или функциях предложения затрат) и на продукцию (или функциях спроса на продукцию).

8.1. ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ

Предположим, что фирма производит только один вид продукции, используя несколько видов затрат; в этом случае фирма должна выбрать точку в *пространстве затрат*, которое состоит из всех возможных комбинаций затрат. Если обозначить через x_j количество j-го вида затрат, используемых фирмой, $j = 1, 2, \ldots, n$, то *вектор затрат* представляет собой вектор-столбец

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'. \tag{8.1.1}$$

Пространство затрат, I, состоящее из всех возможных векторов затрат, является неотрицательным ортантом n-мерного евклидова пространства в предположении, что все затраты могут непрерывно изменяться

$$I = \mathbf{x} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)' \mid x_j \geqslant 0\},\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{8.1.2}$$

[1] Основная литература по теории фирмы [1, 2, 3].

Каждой точке пространства затрат соответствует единственный максимальный выпуск, произведенный при использовании этих затрат. Технологическая связь между выпуском продукции и затратами называется *производственной функцией* [1]. Обозначив через q размеры выпуска, производственную функцию можно записать в виде

$$q = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{8.1.3}$$

Она представляет собой отображение любого вектора затрат (точки пространства затрат) в единственное неотрицательное действительное число, а именно максимальный выпуск, который может быть получен при использовании этого вектора затрат. В дальнейшем будем считать, что производственная функция непрерывно дифференцируема.

Предполагается, что производственная функция удовлетворяет двум аксиомам. Первая из них утверждает, что существует подмножество пространства затрат, называемое *экономической областью*, в которой увеличение любого вида затрат не приводит к уменьшению выпуска продукции. Таким образом, если $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ — две точки этой области, то

$$\mathbf{x}^1 \geqslant \mathbf{x}^2 \text{ влечет за собой } f(\mathbf{x}^1) \geqslant f(\mathbf{x}^2). \tag{8.1.4}$$

Эта область характеризуется неотрицательностью всех первых частных производных производственной функции, которые называются *предельными продуктами*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = MP_j(\mathbf{x}) \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{8.1.5}$$

Определим вектор предельного продукта как вектор-строку

$$\mathbf{MP}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = (MP_1(\mathbf{x}), MP_2(\mathbf{x}), \ldots, MP_n(\mathbf{x})), \tag{8.1.6}$$

тогда экономическая область явится подмножеством пространства затрат

$$\{\mathbf{x} \in I \mid \mathbf{MP}(\mathbf{x}) \geqslant \mathbf{0}\}. \tag{8.1.7}$$

Вторая основная аксиома утверждает, что существует особая область R, выпуклое подмножество экономической области, для которой матрица Гессе производственной функции

$$H = H(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2}(\mathbf{x}) \tag{8.1.8}$$

отрицательно определена для всех $\mathbf{x}$ из R. В этой особой области *производственные множества*

$$\{\mathbf{x} \in I \mid f(\mathbf{x}) \geqslant q^0\} \tag{8.1.9}$$

являются выпуклыми для каждого неотрицательного числа q^0. В ней также выполняется

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j}(MP_j(\mathbf{x})) < 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \tag{8.1.10}$$

это соотношение называется *законом убывающей отдачи* (*убывающей доходности*): по мере того как затраты одного вида добавляются к установленным объемам других затрат, в конечном счете достигается особая область, в которой предельный продукт затрат снижается. Классическим примером этого закона является добавление все большего и большего количества труда в производстве зерна на фиксированном участке земли. После достижения определенной точки дополнительный выпуск продукции, производимый добавочным человеком, будет падать вследствие исчерпания возможностей специализации и в связи с трудностями координации усилий [1].

Согласно этим двум аксиомам, существует выпуклая область пространства затрат, называемая *особой областью* R и определенная соотношением

$$R = \{\mathbf{x} \in I \mid \mathbf{MP}(\mathbf{x}) \geqslant \mathbf{0}\}, \ \mathbf{H}(\mathbf{x}) \text{ отрицательно определена.} \tag{8.1.11}$$

Производственная функция в особой области характеризуется отдачей (доходом) от расширения масштаба производства и «возможностями замещения».

Доход от расширения масштаба производства характеризует производственную функцию с точки зрения «поведения» выпуска продукции, если все затраты изменяют-

[1] См. [4, 5, 6]. О производственной функции в случае выпуска нескольких видов продукции см. раздел «Задачи» в этой главе, а более общая дискуссия о технологии, описанной множествами, а не функциями, приводится в гл. 10.

[1] Рассматриваемый автором случай неизменного уровня техники исчерпывающе разобран В. И. Лениным в статье «Аграрный вопрос и «критики Маркса» (1901 г.). — В. И. Ленин, Полн. собр. соч., т. 5, стр. 100—103.—*Прим. ред.*

ся в одинаковой пропорции. Предположим, что в определенной точке пространства затрат $\mathbf{x}$ все затраты умножаются по масштабу на число α: $\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$, где $\alpha > 1$. Производственная функция характеризуется *постоянным доходом от расширения масштаба производства*, если выпуск возрастает в той же пропорции, что и затраты

$$f(\alpha\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x}). \tag{8.1.12}$$

Так, например, удвоение всех затрат приводит к увеличению выпуска продукции в два раза. Аналогично производственная функция характеризуется *возрастающим* (*убывающим*) *доходом от расширения масштаба производства*, если она возрастает в большей (меньшей) степени, чем все затраты

$$f(\alpha\mathbf{x}) > (<)\ \alpha f(\mathbf{x}). \tag{8.1.13}$$

Конечно, производственная функция может характеризоваться постоянным доходом от расширения масштаба производства в одних точках пространства затрат и возрастающим или убывающим доходом от расширения масштаба производства в других. Локальным показателем измерения дохода от расширения масштаба производства, определенным в некоторой точке пространства затрат, является *эластичность производства*

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \lim_{\alpha\to 1} \frac{\alpha}{f(\alpha\mathbf{x})} \frac{\partial f(\alpha\mathbf{x})}{\partial\alpha} = \lim_{\alpha\to 1} \frac{\partial \ln f(\alpha\mathbf{x})}{\partial \ln \alpha}, \tag{8.1.14}$$

т. е. эластичность выпуска по отношению к параметру масштаба α. В случае постоянного (возрастающего, убывающего) дохода от расширения масштаба производства эластичность замещения равна (больше, меньше) единице. Так как $f(\alpha\mathbf{x}) = f(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$, то после дифференцирования обеих сторон по α получим

$$\frac{\partial f(\alpha\mathbf{x})}{\partial\alpha} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\alpha\mathbf{x})}{\partial(\alpha x_j)} x_j. \tag{8.1.15}$$

Таким образом, эластичность производства можно записать в виде

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \lim_{\alpha\to 1} \frac{\alpha}{f(\alpha\mathbf{x})} \frac{\partial f(\alpha\mathbf{x})}{\partial\alpha} = \lim_{\alpha\to 1} \frac{\alpha}{f(\alpha\mathbf{x})} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial(\alpha x_j)} x_j \tag{8.1.16}$$

или

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{MP}(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})}(\mathbf{x}). \tag{8.1.17}$$

Определим *эластичность выпуска* по отношению к изменению затрат j-го вида как

$$\varepsilon_j(\mathbf{x}) = \frac{x_j}{f(\mathbf{x})} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{8.1.18}$$

тогда уравнение (8.1.17) примет вид

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j(\mathbf{x}). \tag{8.1.19}$$

Таким образом, эластичность производства в любой точке особой области равна сумме эластичностей выпуска по отношению к различным затратам в этой точке.

Возможности замещения характеризуют производственную функцию с точки зрения различных комбинаций затрат, порождающих одинаковые уровни выпуска. Локальным измерением замещения между двумя затратами, скажем x_j и x_k, когда все остальные затраты остаются постоянными, в некоторой точке особой области может служить эластичность замещения между затратами j и k, определенная как

$$\sigma_{jk}(\mathbf{x}) = -\frac{d\ln(x_j/x_k)}{d\ln(MP_j(\mathbf{x})/MP_k(\mathbf{x}))}, \quad j, k = 1, 2, \ldots, n, \tag{8.1.20}$$

т. е. процентное изменение соотношения затрат, деленное на процентное изменение соотношения их предельных продуктов (знак минус подтверждает, что $\sigma_{jk} \geqslant 0$ в особой области). Эластичности замещения характеризуют кривизну *изоквант*, множеств затрат, необходимых для производства одного и того же уровня выпуска

$$\{\mathbf{x} \in I \mid f(\mathbf{x}) = q^0\}, \tag{8.1.21}$$

где q^0 — заданный уровень выпуска. Дифференцирование вдоль изокванты приводит к формуле

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x})\, dx_j = 0; \tag{8.1.22}$$

поэтому, определив $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)'$, получаем

$$\mathbf{MP}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{8.1.23}$$

Если все затраты фиксированы, кроме затрат **вида** j **и** k, **то**

$$MP_j(\mathbf{x})\,dx_j + MP_k(\mathbf{x})\,dx_k = 0; \tag{8.1.24}$$

поэтому

$$\left.\frac{dx_j}{dx_k}\right|\text{ изокванта} = -\frac{MP_k(\mathbf{x})}{MP_j(\mathbf{x})}. \tag{8.1.25}$$

Теперь запишем величину, обратную эластичности замещения (8.1.20) в виде

$$\frac{1}{\sigma_{jk}} = \frac{d\ln(MP_k(\mathbf{x})/MP_j(\mathbf{x}))}{d\ln(x_j/x_k)} =$$

$$= \frac{d\ln(-dx_j/dx_k \mid \text{изокванта})}{d\ln(x_j/x_k)}. \tag{8.1.26}$$

Вышеизложенная характеристика производственной функции может быть геометрически проиллюстрирована в случае двух затрат ($n = 2$), для которых производственная функция имеет следующий вид:

$$q = f(x_1, x_2). \tag{8.1.27}$$

Изокванты выражаются формулой

$$f(x_1, x_2) = q^0 = \text{const}; \tag{8.1.28}$$

некоторые из них показаны на рис. 8.1, где наклон изоквант из (8.1.25) вычисляется по выражению

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|\text{ изокванта} = -\frac{MP_1(\mathbf{x})}{MP_2(\mathbf{x})}. \tag{8.1.29}$$

В особой области, заштрихованной на рис. 8.1, оба предельных продукта неотрицательны, поэтому наклон изоквант неположителен. Особая область, совпадающая здесь с экономической областью, ограничена двумя кривыми, которые называются *разделяющими линиями*. Разделяющая линия 1 является геометрическим местом затрат, для которых наклон изокванты равен нулю ($MP_1(\mathbf{x}) = 0$), а разделяющая линия 2 характеризует геометрическое место затрат, для которых наклон изокванты равен бесконечности ($MP_2(\mathbf{x}) = 0$). Разделяющая линия 1 показывает минимальные количества x_2, необходимые для производства различных уровней выпуска. Например, для того чтобы произвести $\bar{\bar{q}}$, необходимо по крайней мере $\bar{x}_2$ затрат второго вида. Аналогично разделяющая линия 2 показывает минимальные количества x_1, необходимые для выпуска различных объемов продукции. Например, для

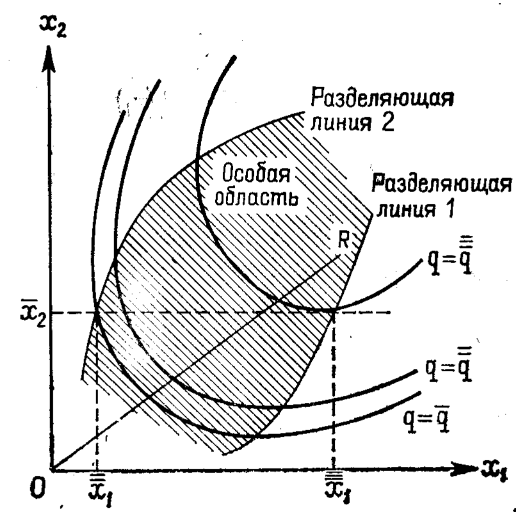

Рис. 8.1.

того чтобы произвести $\bar{q}$, требуется по крайней мере $\bar{\bar{x}}_1$ затрат первого вида.

Рис. 8.1 можно также использовать для иллюстрации понятия дохода от расширения масштаба производства. Если производственная функция характеризуется постоянным доходом от расширения масштаба производства, то

$$f(\alpha x_1, \alpha x_2) = \alpha f(x_1, x_2). \tag{8.1.30}$$

Взяв в качестве $\alpha = \dfrac{1}{x_1}$, получим

$$q = f(x_1, x_2) = \frac{1}{\alpha} f(\alpha x_1, \alpha x_2) = x_1 f\left(1, \frac{x_2}{x_1}\right), \tag{8.1.31}$$

т. е. выпуск зависит только от уровня затрат одного вида (x_1) и от отношения затрат (x_2/x_1). Вдоль каждого луча, проходящего через начало координат, такого, как OR на рис. 8.1, соотношение затрат постоянно, так что выпуск продукции зависит только от x_1. Например, если количество затрат первого вида в точке, где OR пересекает изокванту $\bar{\bar{q}}$, равно удвоенному количеству в точке, где OR пересекает изокванту $\bar{q}$, то $\bar{\bar{q}} = 2\bar{q}$. При этом очевидно, что если производственная функция характеризуется постоянным доходом от расширения масштаба производ-

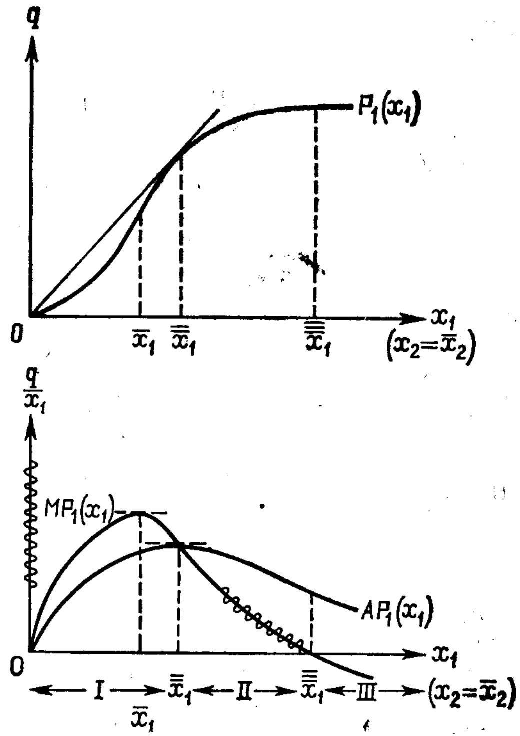

Рис. 8.2. Кривые продукции.

ства, то все изокванты являются радиальными растяжениями относительно какой-либо одной изокванты.

В качестве иллюстрации закона убывающей доходности могут служить *кривые продукции*, как это показано на рис. 8.2. На верхнем графике построена кривая продукции для затрат первого типа

$$P_1(x_1) = f(x_1, \bar{x}_2), \qquad (8.1.32)$$

показывающая зависимость выпуска от затрат первого типа при неизменных затратах второго типа. На нижнем графике показаны *кривые среднего и предельного продукта*

$$AP_1(x_1) = \frac{P_1(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_1, \bar{x}_2)}{x_1} \qquad (8.1.33)$$

$$MP_1(x_1) = \frac{dP_1(x_1)}{dx_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \bar{x}_2). \qquad (8.1.34)$$

Первое равенство характеризует выпуск продукции, произведенной на единицу затрат первого вида; второе — добавочный доход, полученный при использовании дополнительного количества затрат первого типа. Геометрически MP_1 выражает наклон кривой P_1, а AP_1 — тангенс угла, составленного лучом, проведенным из начала координат в P_1.

На обоих графиках показаны три критические точки: первая — $(\bar{x}_1)$, в которой P_1 имеет точку перегиба, где MP_1 достигает максимума; вторая — $(\bar{\bar{x}}_1)$, в которой луч из начала координат касается P_1, где AP_1 достигает максимума и равно MP_1, третья — $(\bar{\bar{\bar{x}}}_1)$, в которой P_1 достигает максимума и MP_1 равно нулю. Рис. 8.2 иллюстрирует закон убывающей доходности, так как MP_1 понижается в конце концов после первой критической точки.

На рис. 8.2 нашли отражение также три *стадии производства*. Первая стадия длится до второй критической точки, в которой средний продукт достигает максимума (и равен предельному продукту). На этой стадии предельный продукт превышает средний.

$$\text{Стадия 1: } MP_1 > AP_1 > 0. \qquad (8.1.35)$$

Вторая стадия находится между второй и третьей критическими точками. На этой стадии средний продукт превышает предельный, а последний положителен.

$$\text{Стадия 2: } AP_1 > MP_1 > 0. \qquad (8.1.36)$$

Третья стадия расположена за третьей критической точкой. На этой стадии предельный продукт отрицателен.

$$\text{Стадия 3: } MP_1 < 0. \qquad (8.1.37)$$

Если производственная функция показывает постоянный доход от расширения масштаба производства, то стадии 1 и 3 симметричны. В этом случае эластичность производства равна единице; поэтому из уравнения (8.1.17) получим

$$q = x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 MP_1 + x_2 MP_2. \qquad (8.1.38)$$

Разделив это соотношение на x_1 и используя прежние обозначения, получим

$$AP_1 = MP_1 + \frac{x_2}{x_1} MP_2, \qquad (8.1.39)$$

или

$$MP_2 = \frac{x_1}{x_2}(AP_1 - MP_1). \qquad (8.1.40)$$

Таким образом, стадию **1, в которой $MP_1 > AP_1$, можно** равным образом **характеризовать в виде соотношения** $MP_2 < 0$, тогда

$$\begin{aligned} &\text{Стадия 1:}\quad MP_2 < 0;\\ &\text{Стадия 3:}\quad MP_1 < 0; \end{aligned} \qquad (8.1.41)$$

это показывает симметричность стадий 1 и 3. Такой вывод **также** может быть получен при сравнении рис. 8.1 **и** рис. 8.2. На рис. 8.2 затраты второго вида зафиксиро**ваны** в размере $\bar{x}_2$, показываемом горизонтальной линией на рис. 8.1. Точки $\bar{\bar{x}}_1$ и $\bar{\bar{\bar{x}}}_1$ на рис. 8.1 соответствуют аналогично обозначенным точкам на рис. 8.2. Соответствие $\bar{\bar{\bar{x}}}_1$ на двух рисунках следует из того, что если затраты второго вида остаются неизменными на уровне $\bar{x}_2$, то возрастание x_1 вдоль этой горизонтальной линии на рис. 8.1 приводит к увеличению выпуска, пока не будет достигнуто $\bar{\bar{\bar{x}}}_1$. После $\bar{\bar{\bar{x}}}_1$ горизонтальная линия проходит через все более низкие изокванты, поэтому максимальный выпуск находится **в** точке $\bar{\bar{\bar{x}}}_1$, как показано на рис. 8.2. Соответствие $\bar{\bar{x}}_1$ на **двух** рисунках следует из уравнения (8.1.40). Слева от $\bar{\bar{x}}_1$ **на** рис. 8.1 изокванты имеют положительный наклон, **потому** что $MP_2 < 0$. По (8.1.40) это условие выполняет**ся**, только если $MP_1 > AP_1$, что характеризует область слева от $\bar{\bar{x}}_1$ на рис. 8.2. Таким образом, если функция показывает постоянный доход от масштаба, то стадии 1 и 3 не только симметричны, но они соответствуют областям снаружи разделяющих линий. Экономическая область, в которой предельные продукты неотрицательны и изокванты имеют отрицательный наклон, соответствует стадии 2, где предельный продукт ниже среднего и положителен.

Некоторые частные типы производственных функций в случае двух видов затрат представлены в табл. 8-1. Для *линейной производственной функции* характерна линейная зависимость выпуска от затрат. *Производственная функция Кобба — Дугласа* выражает логарифм выпуска как линейную функцию логарифма затрат [7, 8]. ***Производственная функция затрат — выпуска*** **есть одна**

Таблица 8.1

Производственные функции в случае двух видов затрат

Тип производственной функции	Производственная функция $q = f(x_1, x_2)$	Эластичность замещения ε	Эластичность производства σ	Параметры
1	2	3	4	5
Линейная	$q = a_1x_1 + a_2x_2$	∞	1	a_j — предельный физический продукт затрат $j \geq 0$, $j = 1, 2$
Кобба — Дугласа	$q = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2}$	1	$b_1 + b_2$	b_0 — фактор шкалы > 0 b_j — эластичность выпуска продукции по отношению к затратам $j \geq 0$, $j = 1, 2$
Затраты — выпуск	$q = \min\left(\frac{x_1}{c_1}, \frac{x_2}{c_2}\right)$ или $(x_j \geq c_j q,\ j = 1, 2)$	0	1, $\frac{x_1}{c_1} = \frac{x_2}{c_2}$	c_j — количество затрат вида j, необходимое для производства одной единицы продукции ≥ 0, $j = 1, 2$
Анализа способов производственной деятельности	$q = \sum_{k=1}^{p} d_k y_k$ $\sum_{k=1}^{p} d_{jk} y_k \leq x_j$, $j = 1, 2$	0	1	p — число способов производственной деятельности y_k — уровень интенсивности способа k, $k = 1, 2, \ldots, p$ d_k — выпуск продукции при единичной интенсивности k, $k = 1, 2, \ldots, p$ d_{jk} — количество затрат вида j, необходимых при единичной интенсивности способа k, $j = 1, 2$; $k = 1, \ldots, p$
С постоянной эластичностью замещения	$q = e_0 [e_1 x_1^{-\beta} + e_2 x_2^{-\beta}]^{-h/\beta}$	$\frac{1}{1+\beta}$	h	e_0 — коэффициент шкалы > 0 e_j — коэффициент распределения ≥ 0, $j = 1, 2$ h — степень однородности > 0 β — коэффициент замещения ≥ -1

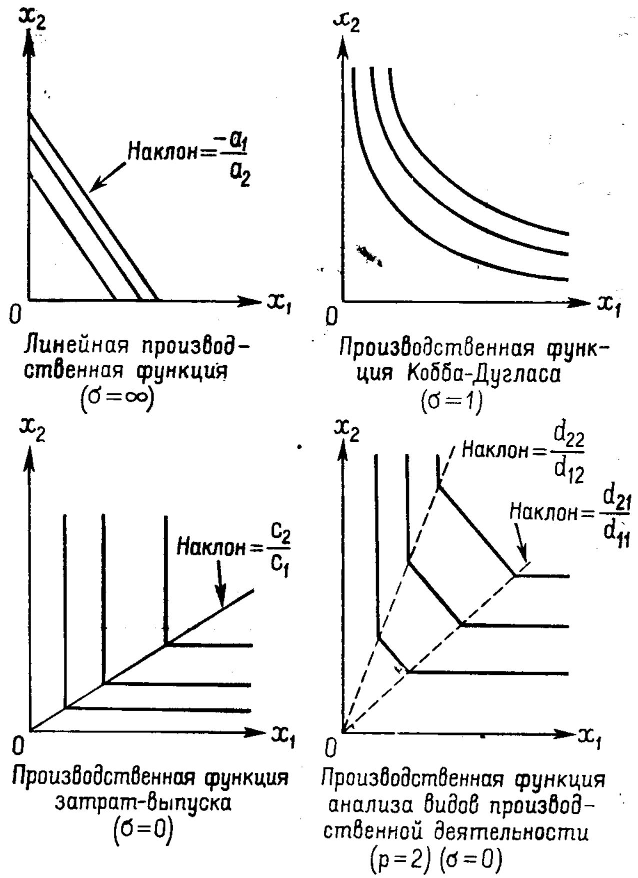

Рис. 8.3. Изокванты для различных производственных функций.

из заданных пропорций, которыми для производства одной единицы выпуска определяется количество затрат каждого вида [9, 10, 11]. *Производственная функция анализа производственной деятельности* обобщает производственную функцию затрат — выпуска на случай, когда существует p элементарных процессов, называемых «активностями», каждый из которых может протекать при любой неотрицательной «интенсивности». Выпуск, произведенный при единичной интенсивности, и затраты, необходимые на единицу интенсивности,

фиксированы, а общий выпуск и общие затраты находятся путем простого сложения выпуска и затрат соответственно для каждой активности при выбранных интенсивностях [1]. Изокванты для этих четырех производственных функций показаны на рис. 8.3. *Производственная функция с постоянной эластичностью замещения* (constant elasticity of substitution, CES), для которой σ, эластичность замещения, равна $\frac{1}{1+\beta}$, является обобщением производственных функций трех первых типов: если β стремится к -1, CES стремится к линейной производственной функции ($\sigma = \infty$); если β приближается к нулю, то CES приближается к производственной функции Кобба — Дугласа ($\sigma = 1$); и если β стремится к ∞, то CES стремится принять вид производственной функции затрат — выпуска ($\sigma = 0$) [16, 17].

8.2. НЕОКЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФИРМЫ

Неоклассическая теория фирмы построена на предположении, что цель фирмы заключается в максимизации прибыли путем выбора видов затрат, при заданной производственной функции и заданных ценах выпуска p и ценах затрат (оплатах факторов производства) $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$. Прибыль Π равна годовому доходу R за вычетом издержек производства C, т. е.

$$\Pi = R - C, \tag{8.2.1}$$

где годовой доход вычисляется как годовая продукция, умноженная на цену выпуска. Используя (8.1.3), получим

$$R = pq = pf(\mathbf{x}). \tag{8.2.2}$$

Издержки производства равны общим выплатам за все виды затрат

$$C = \sum_{j=1}^{n} w_j x_j = \mathbf{wx}. \tag{8.2.3}$$

[1] См. [12, 13, 14, 15]. Заметим, что задача максимизации выпуска путем выбора неотрицательных затрат превращается в задачу линейного программирования при анализе производственной деятельности:

$$\max_{y_1, y_2, \ldots, y_p} \sum_{k=1}^{p} d_k y_k \text{ при условии } \sum_{k=1}^{p} d_{jk} y_k \leqslant x_j, \quad j = 1, 2, \ldots n,$$
$$y_k \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots, p.$$

Решая *долгосрочную задачу*, фирма свободна выбрать любой вектор затрат из пространства затрат, поэтому задача формулируется следующим образом:

$$\max_{\mathbf{x}} \Pi(\mathbf{x}) = pf(\mathbf{x}) - \mathbf{wx} \text{ при условии } \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, \quad (8.2.4)$$

или в развернутой форме

$$\max_{x_1, x_2, \ldots, x_n} \Pi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = pf(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \sum_{j=1}^{n} w_j x_j$$

при условии

$$x_1 \geqslant 0, \; x_2 \geqslant 0, \; \ldots, \; x_n \geqslant 0. \quad (8.2.5)$$

Эта задача представляет собой задачу нелинейного программирования, в которой в качестве инструментальных переменных выступает $\mathbf{x}$, вектор затрат; целевая функция выражается функцией прибыли $\Pi(\mathbf{x})$; единственным ограничением является условие неотрицательности $\mathbf{x}$ и заданы $(n+1)$ параметров p и $\mathbf{w}$. В противоположность долгосрочной задаче, для которой характерно, что все затраты можно произвольно варьировать, при *краткосрочной* появляются ограничения на выбор затрат, как, например, пониженные лимиты на определенные затраты из-за договорных обязательств. В краткосрочной задаче фирма должна выбрать вектор затрат из заданного подмножества пространства затрат, так что к задаче (8.2.4) добавляется ряд ограничений

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) < \mathbf{b}, \quad (8.2.6)$$

или

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad (8.2.7)$$

где эти m неравенств выражают ограничения на затраты для определенного краткосрочного периода.

В условиях долгосрочности необходимыми условиями для максимизации прибыли являются условия Куна — Таккера

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{x}} = p\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) - \mathbf{w} \leqslant \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} = \left(p\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) - \mathbf{w}\right)\mathbf{x} = 0 \quad (8.2.8)$$

$$\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}.$$

Таким образом, для всех затрат

$$pMP_j(\mathbf{x}) = p\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \leqslant w_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \quad (8.2.9)$$

и

$$\left.\begin{array}{l} pMP_j(\mathbf{x}) = w_j, \text{ если } x_j > 0 \\ x_j = 0, \quad \text{если } p\,MP_j(\mathbf{x}) < w_j \end{array}\right\} j = 1, 2, \ldots, n, \quad (8.2.10)$$

где $pMP_j(\mathbf{x})$ представляет собой *стоимость предельного продукта* в точке $\mathbf{x}$, т. е. стоимость добавочного выпуска, полученного при использовании добавочных затрат j-го вида.

Предположим, что все затраты были действительно использованы $(\mathbf{x} > 0)$, тогда условия первого порядка будут иметь вид

$$p\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = p\mathbf{MP}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}, \quad (8.2.11)$$

т. е. стоимость предельных продуктов равна плате за затраты факторов производства. Точка из особой области, определенной в (8.1.11), удовлетворяющая (8.2.11), является решением задачи фирмы для долгосрочного периода, так как удовлетворяются условия первого порядка и условия достаточности второго порядка.

Условия первого порядка

$$\psi_j(\mathbf{x}) = p\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) - w_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n \quad (8.2.12)$$

можно разрешить относительно оптимальных затрат, если матрица Якоби

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = p\mathbf{H} \quad (8.2.13)$$

невырожденна. Предположим, что вектор затрат $\mathbf{x}$ лежит в особой области; тогда матрица Якоби невырожденна и оптимальные уровни затрат могут быть выражены как функции $(n+1)$ параметра задачи

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(p, \mathbf{w}), \tag{8.2.14}$$

т. е.

$$x_j^* = x_j^*(p, w_1, w_2, \ldots, w_n), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{8.2.15}$$

Эти n уравнений образуют *функции спроса на затраты*, выражающие оптимальные выборы затрат как функции цен продукции и плат за факторы производства. Эти функции однородны нулевой степени, так как, умножая цены и платы на положительный коэффициент шкалы α, меняя $(p, \mathbf{w})$ на $(\alpha p, \alpha \mathbf{w})$ в (8.2.4), мы изменим Π на $\alpha\Pi$, а максимизация $\alpha\Pi$, где $\alpha > 0$, эквивалентна максимизации Π. Таким образом,

$$\mathbf{x}^*(\alpha p, \alpha \mathbf{w}) = \mathbf{x}^*(p, \mathbf{w}) \text{ для всех } \alpha > 0. \tag{8.2.16}$$

Подставляя функции спроса на затраты в производственную функцию, получим выпуск как функцию цен продукции и платы за факторы производства

$$q^* = f(\mathbf{x}^*(p, \mathbf{w})) = q^*(p, \mathbf{w}), \tag{8.2.17}$$

т. е. *функцию предложения выпуска*. Так как функция спроса на затраты однородна нулевой степени, то и для функции предложения продукции справедливо

$$q^*(\alpha p, \alpha \mathbf{w}) = q^*(p, \mathbf{w}) \text{ для всех } \alpha > 0, \tag{8.2.18}$$

поэтому пропорциональное изменение в ценах продукции и плате за факторы производства не влияет ни на затраты, ни на выпуск продукции.

Полученные результаты можно проиллюстрировать геометрически в случае двух видов затрат. На рис. 8.4 показаны изокванты, как на рис. 8.1, а также *изокосты* (isocosts), геометрические места точек, для которых издержки производства постоянны

$$\mathbf{x} = \{(x_1, x_2)' \mid C = w_1x_1 + w_2x_2 = \text{const}\}. \tag{8.2.19}$$

Так как w_1 и w_2 предполагаются заданными, изокосты являются параллельными линиями с наклоном

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{\text{изокоста}} = -\frac{w_1}{w_2}. \tag{8.2.20}$$

Изокванты из (8.1.29) имеют наклон

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{\text{изокванта}} = -\frac{MP_1(\mathbf{x})}{MP_2(\mathbf{x})}. \tag{8.2.21}$$

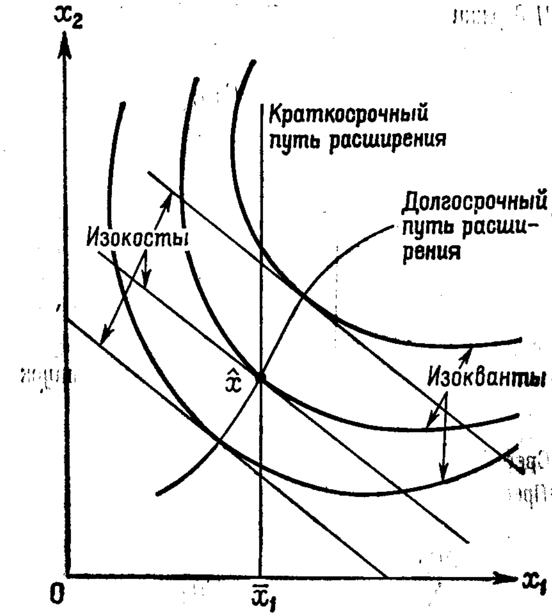

Рис. 8.4. Пути расширения.

Запишем условия второго порядка

$$\begin{aligned} pMP_1(\mathbf{x}) &= w_1 \\ pMP_2(\mathbf{x}) &= w_2, \end{aligned} \tag{8.2.22}$$

требующие пересечения изоквант и изокост

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{\text{изокванта}} = -\frac{MP_1(\mathbf{x})}{MP_2(\mathbf{x})} = -\frac{w_1}{w_2} = \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{\text{изокоста}}. \tag{8.2.23}$$

Геометрическое место пересечений изокост и изоквант определяет собой *долгосрочный путь расширения*. Он показывает затраты, максимизирующие выпуск продукции при любом определенном уровне издержек или равнозначно затраты, минимизирующие издержки при определенном уровне выпуска, где уровень издержек определяется изокостой, а уровень выпуска — изоквантой. Используя путь расширения изокванты и изокосты, можно получить *кривую издержек* $C(q)$, выражающую издержки как функцию выпуска. Типичная кривая издержек и соответствующие ей кривые средних и предельных издержек пока-

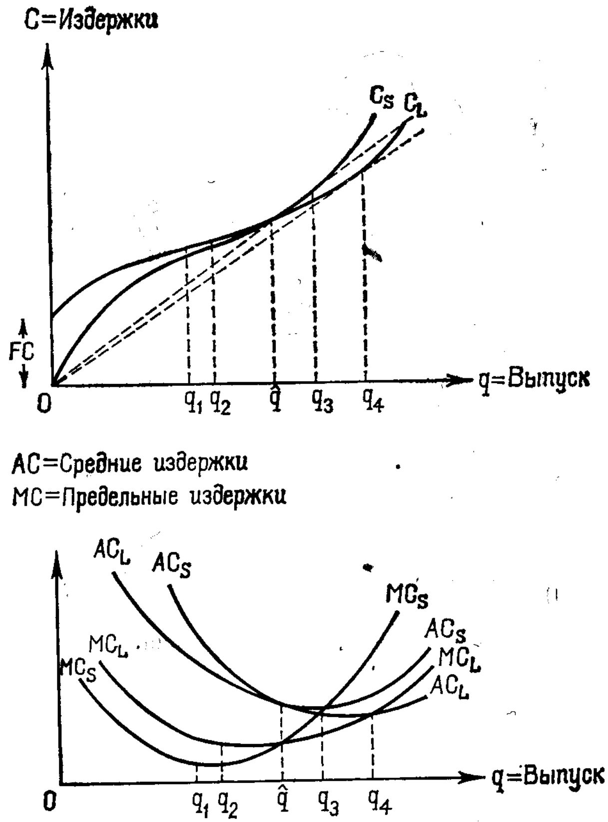

Рис. 8.5. Кривые издержек.

заны на рис. 8.5 как C_L, AC_L и MC_L, где нижний индекс относится к долгосрочному периоду

$$C_L = w_1x_1 + w_2x_2 = C_1(q)$$
$$AC_L = \frac{C_L(q)}{q} \qquad (8.2.24)$$
$$MC_L = \frac{dC_L(q)}{dq}.$$

Заметим, что при q_2 в точке перегиба C_L кривая MC_L достигает минимума; при q_4, где луч, проведенный из начала координат, касается C_L, кривая AC_L достигает минимума и две кривые пересекаются ($AC_L = MC_L$); слева от q_4, где MC_L лежит ниже AC_L, кривая AC_L убывает; справа от q_4, где MC_L лежит выше AC_L, кривая AC_L возрастает.

Частный случай краткосрочного периода, для которого затраты первого вида зафиксированы на уровне $\bar{x}_1$, показан вертикальной линией на рис. 8.4, представляющей собой путь расширения для этого краткосрочного периода. Тогда соответствующими кривыми издержек будут краткосрочные кривые издержек C_S, AC_S и MC_S, как это показано на рис. 8.5. В точке $\hat{x}$ на рис. 8.4, где пересекаются два пути расширения, выпуск и издержки одинаковы, поэтому в соответствующей точке $\hat{q}$ на рис. 8.5 краткосрочные и долгосрочные издержки равны. Все остальные точки на краткосрочном пути расширения не оптимальны в том смысле, что при определенном уровне выпуска, заданном изоквантой, издержки не минимальны. Таким образом, на рис. 8.5 краткосрочные издержки и средние издержки для любого выпуска, отличающегося от $\hat{q}$, больше соответствующих долгосрочных издержек и средних издержек. При q_1 и q_3 соответственно краткосрочные предельные и средние издержки достигают своего минимального значения и отношения между издержками, средними издержками и предельными издержками для долгосрочного и краткосрочного периодов одинаковы. Положительная ордината FC кривой издержек является *фиксированными издержками* и определяет издержки при нулевом выпуске, в данном случае равные $w_1\bar{x}_1$.

Кривая издержек характеризует (минимальные) издержки при различных уровнях выпуска. Тогда оптимальным уровнем выпуска является решение задачи

$$\max_{\{q\}} \Pi(q) = pq - C(q), \qquad (8.2.25)$$

которое в виде условий первого порядка требует, чтобы цены равнялись предельным издержкам

$$p = MC = \frac{dC}{dq}, \qquad (8.2.26)$$

а условия достаточности второго порядка утверждают, что предельные издержки должны возрастать в этой точке

$$\frac{d^2C}{dq^2} > 0. \qquad (8.2.27)$$

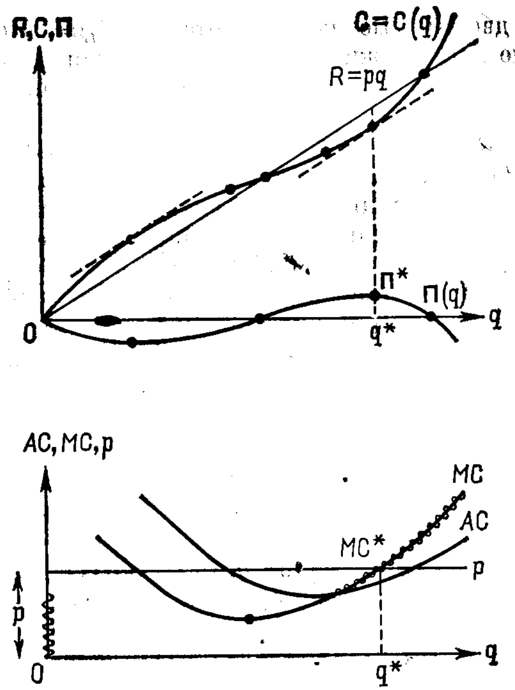

Рис. 8.6. Определение оптимального выпуска продукции через доход (валовой) и кривые издержек.

Поэтому оптимальный выпуск на рис. 8.6 находится в q^* и характеризует оптимальный уровень предложения выпуска при ценах выпуска p и заданных платах за затраты факторов производства, которые были использованы при построении кривых издержек.

8.3. СРАВНИТЕЛЬНАЯ СТАТИКА ФИРМЫ

Методом сравнительной статики определяется чувствительность оптимальных затрат и выпуска фирмы к изменениям параметров задачи [1, 2, 18]. Подставляя функцию спроса на затраты (8.2.14) и функцию предложения продук-

ции (8.2.17) в необходимые условия (8.2.11) и производственную функцию (8.1.3), получим $(n+1)$ тождеств

$$q^*(p, \mathbf{w}) \equiv f(\mathbf{x}^*(p, \mathbf{w})) \qquad (8.3.1)$$
$$p\,\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(p, \mathbf{w})) \equiv \mathbf{w}.$$

Дифференцируя эти тождества по $(n+1)$ параметрам p и $\mathbf{w}$, определим степень чувствительности оптимальных затрат и выпуска продукции.

Рассмотрим сначала влияние изменения цены выпуска p. Дифференцируя (8.3.1) по p, получим

$$\frac{\partial q^*}{\partial p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial x_k^*}{\partial p} \qquad (8.3.2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + p\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_k}\frac{\partial x_k^*}{\partial p} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

или в векторно-матричных обозначениях

$$\frac{\partial q}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p} \qquad (8.3.3)$$
$$\frac{\partial f'}{\partial \mathbf{x}} + p\mathbf{H}\,\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p} = 0,$$

где $\partial q/\partial p$ характеризует изменение оптимального выпуска продукции, если меняется его цена; $\partial \mathbf{x}/\partial p$ — влияние изменения цены продукции на оптимальные затраты

$$\frac{\partial q}{\partial p} = \frac{\partial q^*(p, w)}{\partial p} \qquad (8.3.4)$$
$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p} = \left(\frac{\partial x_1^*(p, \mathbf{w})}{\partial p}, \frac{\partial x_2^*(p, \mathbf{w})}{\partial p}, \ldots, \frac{\partial x_n^*(p, \mathbf{w})}{\partial p}\right)',$$

$\partial f/\partial \mathbf{x}$ — вектор-строка предельных продуктов, а $\mathbf{H}$ — матрица Гессе. Уравнения (8.3.3) могут быть записаны в виде одного матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} -1 & \dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \\ 0 & p\mathbf{H} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial q}{\partial p} \\ \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\left(\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right)' \end{pmatrix}. \qquad (8.3.5)$$

Затем рассмотрим влияние изменения в оплате затрат l-го вида. Дифференцируя (8.3.1) по w_l, получим

$$\frac{\partial q^*}{\partial w_l}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial x_k^*}{\partial w_l}$$
$$p\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_k}\frac{\partial x_k^*}{\partial w_l}=\delta_{lj},\quad j=1,\,2,\,\ldots,\,n. \tag{8.3.6}$$

Используя векторно-матричные обозначения, эти уравнения для $l=1,\,2,\,\ldots,\,n$ можно записать в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial q}{\partial \mathbf{w}}\right)'=\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{w}}$$
$$p\mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{w}}=\mathbf{I}, \tag{8.3.7}$$

где $\partial q/\partial \mathbf{w}$ — влияние изменений в оплатах затрат на продукцию, а $\partial \mathbf{x}/\partial \mathbf{w}$ — влияние изменений затрат при изменении оплат факторов производства

$$\frac{\partial q}{\partial \mathbf{w}}=\left(\frac{\partial q^*(p,\,\mathbf{w})}{\partial w_1},\,\frac{\partial q^*(p,\,\mathbf{w})}{\partial w_2},\,\ldots,\,\frac{\partial q^*(p,\,\mathbf{w})}{\partial w_n}\right)'$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{w}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x_1^*(p,\,\mathbf{w})}{\partial w_1} & \frac{\partial x_1^*(p,\,\mathbf{w})}{\partial w_2} & \ldots, & \frac{\partial x_1^*(p,\,\mathbf{w})}{\partial w_n}\\ \frac{\partial x_2^*(p,\,\mathbf{w})}{\partial w_1} & \frac{\partial x_2^*(p,\,\mathbf{w})}{\partial w_2} & \ldots, & \frac{\partial x_2^*(p,\,\mathbf{w})}{\partial w_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial x_n^*(p,\,\mathbf{w})}{\partial w_1} & \frac{\partial x_n^*(p,\,\mathbf{w})}{\partial w_2} & \ldots, & \frac{\partial x_n^*(p,\,\mathbf{w})}{\partial w_n}\end{pmatrix}. \tag{8.3.8}$$

Уравнения (8.3.7) могут быть записаны в виде одного матричного уравнения

$$\begin{pmatrix}-1 & \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\\ 0 & p\mathbf{H}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(\frac{\partial q}{\partial \mathbf{w}}\right)'\\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{w}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \mathbf{I}\end{pmatrix}. \tag{8.3.9}$$

Уравнения (8.3.5) и (8.3.9) можно представить в форме

$$\begin{pmatrix}-1 & \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\\ 0 & p\mathbf{H}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial q}{\partial p} & \frac{\partial q}{\partial \mathbf{w}}\\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{w}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \left(-\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right)' & \mathbf{I}\end{pmatrix}, \tag{8.3.10}$$

которая является *основным матричным уравнением теории фирмы*. Разрешая его относительно показателей сравнительной статики, получим

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial q}{\partial p} & \left(\frac{\partial q}{\partial \mathbf{w}}\right)'\\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{w}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\\ 0 & p\mathbf{H}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ -\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right)' & \mathbf{I}\end{pmatrix}. \tag{8.3.11}$$

Так как в особой области матрица Гессе $\mathbf{H}$ отрицательно определена и, следовательно, невырожденна, то, используя правила обращения блочных матриц, имеем

$$\begin{pmatrix}-1 & \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\\ 0 & p\mathbf{H}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{p}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{H}^{-1}\\ 0 & \frac{1}{p}\mathbf{H}^{-1}\end{pmatrix}. \tag{8.3.12}$$

Поэтому, выполнив матричное умножение (8.3.11), получим

$$\frac{\partial q}{\partial p}=-\frac{1}{p}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right)\mathbf{H}^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right)' \tag{8.3.13}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p}=-\frac{1}{p}\mathbf{H}^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right)' \tag{8.3.14}$$

$$\left(\frac{\partial q}{\partial \mathbf{w}}\right)'=\frac{1}{p}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right)\mathbf{H}^{-1} \tag{8.3.15}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{w}}=\frac{1}{p}\mathbf{H}^{-1}, \tag{8.3.16}$$

характеризующие в явном виде показатели сравнительной статики в терминах цены продукции, матрицы обратной к матрице Гессе и вектора предельного продукта.

Так как $\mathbf{H}$ считается отрицательно определенной, $\mathbf{H}^{-1}$ тоже отрицательно определена и, следовательно, из (8.3.13)

$$\frac{\partial q^*}{\partial p}>0. \tag{8.3.17}$$

Таким образом, возрастание цен продукции всегда приводит к увеличению оптимального уровня выпуска продукции, т. е. кривая предложения продукции должна быть возрастающей. Кривая предложения показана на рис. 8.6 как заштрихованная часть кривой предельных затрат, которая находится выше средних затрат, так как оптимальный выпуск определен на таком уровне, где цена равна предельным издержкам, и заштрихованная часть вертикальной оси до минимальных средних издержек, так как при цене, меньшей, чем средние издержки, продукция не будет выпускаться; действительно, нулевая прибыль более предпочтительна, чем отрицательная, в долгосрочном периоде.

Относительно знаков отдельных элементов $\partial \mathbf{x}/\partial p$ ничего определенного сказать нельзя, но из того факта, что

$$\frac{\partial q}{\partial p}=\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial x_j^*}{\partial p}>0, \qquad (8.3.18)$$

следует, что в особой области, где все предельные продукты неотрицательны, некоторые из $\partial x_j^*/\partial p$ должны быть положительными

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial p}>0 \quad \text{для некоторого } j, \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \qquad (8.3.19)$$

Таким образом, возрастание цены продукции должно привести к увеличению предложения продукции и, следовательно, к повышению спроса на некоторые виды затрат. По определению:

затраты j-го вида называются *малоценными*, если, и только если,

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial p}<0. \qquad (8.3.20)$$

Таким образом, по (8.3.19) не все затраты могут быть малоценными.

Из (8.3.14) и (8.3.15) следует, что

$$\frac{\partial q}{\partial \mathbf{w}}=-\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p}, \qquad (8.3.21)$$

или

$$\frac{\partial q^*}{\partial w_j}=-\frac{\partial x_j^*}{\partial p}, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \qquad (8.3.22)$$

поэтому возрастание цены продукции приводит к повышению (понижению) спроса на определенные виды затрат, если, и только если, увеличение платы за этот вид затрат приводит к сокращению (возрастанию) оптимального выпуска. В частности, увеличение платы за малоценные затраты ведет к увеличению выпуска. Из (8.3.21) и (8.3.18) имеем

$$\frac{\partial q}{\partial p}=\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p}=-\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\frac{\partial q}{\partial \mathbf{w}}=-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial q^*}{\partial w_j}>0, \qquad (8.3.23)$$

поэтому в особой области справедливо, что

$$\frac{\partial q^*}{\partial w_j}<0 \quad \text{для некоторого } j, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \qquad (8.3.24)$$

т. е. возрастание платы за некоторый вид затрат должно привести к уменьшению выпуска продукции.

Из (8.3.16) следует, что

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{w}}\right) \text{ симметрична и отрицательно определена.} \qquad (8.3.25)$$

В частности, элементы вдоль главной диагонали отрицательны

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial w_j}<0, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \qquad (8.3.26)$$

Таким образом, повышение платы за затраты фактора некоторого вида всегда приводит к сокращению спроса на эти затраты. В противоположность теории потребления для фирмы не могут существовать «затраты Гиффина», потому что фирма в отличие от потребителя не должна удовлетворять бюджетному ограничению. Поэтому кривые спроса на затраты всегда убывающие. Так как при равновесии $MP_j = w_j/p$, кривая спроса для затрат первого вида показана на рис. 8.2 как заштрихованное пространство, совпадающее с кривой предельного продукта ниже некоторого уровня, определенного из условия, что прибыль должна быть неотрицательной (и, следовательно, зависимой от расходов на другие затраты и цен продукции), и совпадающее с вертикальной осью выше этого уровня.

Матрица $\partial \mathbf{x}/\partial \mathbf{w}$ симметрична

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial w_l}=\frac{\partial x_l^*}{\partial w_j}, \qquad j,\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \qquad (8.3.27)$$

поэтому влияние изменения платы за затраты l-го вида на спрос, предъявляемый на затраты j-го вида, и влияние изменения платы за затраты j-го вида на спрос, предъявляемый на затраты l-го, вида, одинаковы. По определению затраты j-го и l-го вида являются $\begin{Bmatrix} \textit{взаимозаменяемыми} \\ \textit{взаимодополняемыми} \end{Bmatrix}$,

$$\text{если } \frac{\partial x_j^*}{\partial w_l} \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} 0. \qquad (8.3.28)$$

Например, в случае когда плата за затраты j-го вида возрастает, так что размеры спроса на эти затраты падают, спрос на затраты i-го вида увеличивается (понижается), если затраты являются взаимозаменяемыми (взаимодополняемыми).

8.4. НЕСОВЕРШЕННАЯ КОНКУРЕНЦИЯ. МОНОПОЛИЯ И МОНОПСОНИЯ

Последние два раздела были построены на классическом предположении о совершенной конкуренции, т. е., что заданы все цены, включая цену продукции и цены затрат. Однако во многих случаях фирма обладает некоторой *монопольной властью* оказывать влияние на цену продукции, а *монопсония* имеет власть оказывать влияние на цены затрат.

Монополист имеет возможность влиять на цену продукции путем варьирования выпуска своей продукции, для которой кривую спроса можно записать в следующем виде:

$$p = p(q). \qquad (8.4.1)$$

Эта функция характеризует цену, которую фирма может назначить при различных уровнях предложения продукции. В общем случае фирма может снизить свою цену для того, чтобы продать больше продукции, поэтому

$$\frac{dp}{dq} < 0. \qquad (8.4.2)$$

Поскольку *годовой доход* (валовой) определяется как

$$R(q) = p(q)\, q, \qquad (8.4.3)$$

а *предельный доход* — как изменение годового дохода по мере того, как меняется выпуск продукции

$$MR(q) = \frac{dR}{dq}(q) = p + \frac{dp}{dq}\, q, \qquad (8.4.4)$$

в случае *монополии* предельный доход оказывается меньше цены.

Монопсонист может повлиять на цену затрат путем варьирования своих покупок данного вида затрат

$$w_j = w_j(x_j), \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (8.4.5)$$

Эта функция характеризует плату фирмы за затраты при различных уровнях спроса на них. Вообще фирма может покупать большее количество данного фактора производства, только предложив более высокую плату за него, т. е.

$$\frac{dw_j}{dx_j} > 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (8.4.6)$$

Так как стоимость затрат j-го вида (издержки на затраты j-го вида) можно представить в виде

$$C_j = w_j(x_j)\, x_j, \qquad (8.4.7)$$

а предельная стоимость затрат j-го вида отражает изменения в стоимости этих затрат при увеличении их количества

$$MC_j(x_j) = \frac{dC_j}{dx_j}(x_j) = w_j + \frac{dw_j}{dx_j}\, x_j, \qquad (8.4.8)$$

то в случае монопсонии предельная стоимость затрат превышает их оплату.

Тогда задача фирмы в условиях несовершенной конкуренции может быть представлена в виде

$$\max_{q,\, x_1, \ldots, x_n} \Pi = p(q)\, q - \sum_{j=1}^{n} w_j(x_j)\, x_j \qquad (8.4.9)$$
$$\text{при условии} \quad q = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Введем множитель Лагранжа и запишем функцию Лагранжа

$$L(q, x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = p(q)\, q - \sum_{j=1}^{n} w_j(x_j)\, x_j +$$
$$+ y\,(f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - q). \qquad (8.4.10)$$

Необходимые условия для оптимума находятся приравниванием нулю всех частных производных функции Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial q}=p(q)+\frac{dp(q)}{dq}q-y=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}=-w_j(x_j)+\frac{dw_j}{dx_j}x_j+y\frac{\partial f}{\partial x_j}=0,\ j=1,\ \ldots,\ n \quad (8.4.11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)-q=0.$$

Тогда необходимые условия будут иметь вид

$$y=p+\frac{dp}{dq}q \quad (8.4.12)$$

$$y\frac{\partial f}{dx_j}=w_j+\frac{dw_j}{dx_j}x_j,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n \quad (8.4.13)$$

$$q=f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n). \quad (8.4.14)$$

Первое условие показывает, что в условиях оптимальности множитель Лагранжа равен предельному годовому доходу

$$y=p+\frac{dp}{dq}q=MR. \quad (8.4.15)$$

Вторая группа условий, состоящая из n уравнений, показывает, что предельный продукт любого вида затрат, равный предельному валовому доходу, умноженному на предельный продукт этого вида затрат, в условиях оптимальности равен предельной стоимости этих затрат

$$MRP_j=MRMP_j=w_j+\frac{dw_j}{dx_j}x_j=MC_j,\quad j=1,\ \ldots,\ n. \quad (8.4.16)$$

В последнем условии представлена просто производственная функция. Таким образом $(n+1)$, условия, связывающие n видов затрат и выпуск при несовершенной конкуренции, следующие:

$$MR(q^*)\,MP_j(x_1^*,\ x_2^*,\ \ldots,\ x_n^*)=MC_j(x_j^*),\quad j=1,\ \ldots,\ n \quad (8.4.17)$$

$$q^*=f(x_1^*,\ x_2^*,\ \ldots,\ x_n^*),$$

где $MR(q)$ и $MC_j(x_j)$ задаются соотношениями (8.4.4)

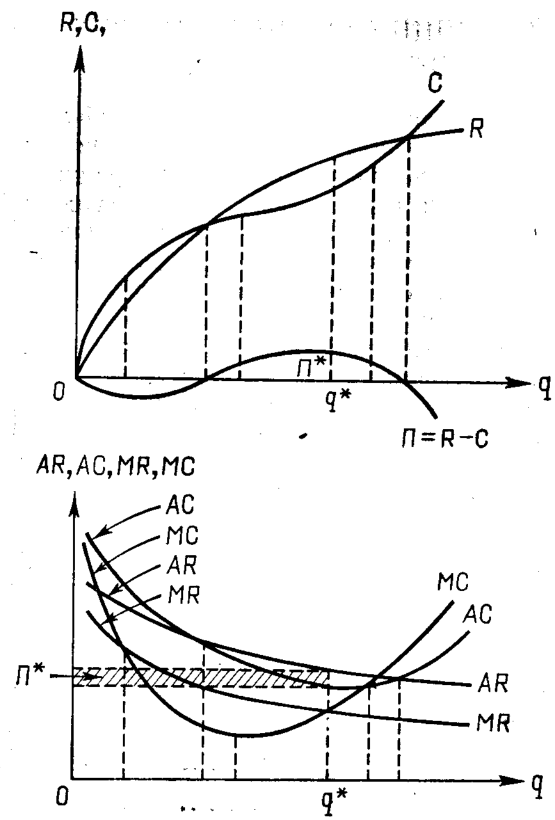

Рис. 8.7. Равновесный выпуск продукции для монополиста.

и (8.4.8) соответственно. Так как оптимальная предельная стоимость выпуска равна

$$MC(q^*)=\frac{MC_j(x_j^*)}{MP_j(x_1^*,\ x_2^*,\ \ldots,\ x_n^*)},\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \quad (8.4.18)$$

то условия (8.4.17) означают, что предельный годовой доход равен предельной стоимости

$$MR(q^*)=MC(q^*). \quad (8.4.19)$$

Это условие равновесия показано геометрически на рис. 8.7, где предельный годовой доход «срезает» предельные издержки сверху.

8.5. КОНКУРЕНЦИЯ СРЕДИ НЕМНОГИХ. ОЛИГОПОЛИЯ И ОЛИГОПСОНИЯ

Рыночный механизм, когда действует небольшое число фирм, называется *конкуренцией среди немногих*: случай, когда существует несколько продавцов продукции, называется *олигополией*, а когда несколько покупателей некоторого вида затрат, называется *олигопсонией* [19, 20, 21]. Определяющим свойством конкуренции среди немногих является то, что все конкурирующие фирмы могут влиять на цены продукции или затрат; таким образом, прибыль каждой фирмы зависит от политики всех остальных конкурирующих фирм. Поэтому, для того чтобы определить оптимальную политику (максимизирующую прибыль), каждая фирма должна учитывать не только свое прямое влияние на рынки выпуска и затрат, но и косвенное влияние — через взаимодействие своих конкурентов.

Необходимо отметить важную общность между конкуренцией среди немногих и теорией игр. В обоих случаях исход (прибыль или выигрыш) для одного агента (фирмы или игрока) зависит от действий (затрат и выпусков или стратегий) всех остальных агентов.

В случае двух конкурентов каждый производит продукцию, используя производственную функцию

$$\begin{aligned} q^1 &= f^1(x_1^1,\ x_2^1,\ \ldots,\ x_n^1) \\ q^2 &= f^2(x_1^2,\ x_2^2,\ \ldots,\ x_n^2), \end{aligned} \tag{8.5.1}$$

где через q^1 обозначается выпуск фирмы 1, q^2 — выпуск фирмы 2, x_j^1 — уровень использования затрат j-го вида фирмой 1 и x_j^2 — уровень использования затрат j-го вида фирмой 2, $j = 1, 2, \ldots, n$. Цены продукции определяются обоими уровнями выпуска

$$p = p(q^1,\ q^2), \tag{8.5.2}$$

т. е. если оба выпуска возрастут, то в результате цены понизятся

$$\frac{\partial p}{\partial q^1} < 0,\quad \frac{\partial p}{\partial q^2} < 0. \tag{8.5.3}$$

Цена любого вида затрат определяется покупками этого вида затрат обеими фирмами

$$w_j = w_j(x_j^1,\ x_j^2),\quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{8.5.4}$$

т. е., если обе фирмы увеличивают покупки этих видов затрат, результатом является повышение цен.

$$\frac{\partial w_j}{\partial x_j^1} > 0,\quad \frac{\partial w_j}{\partial x_j^2} > 0, \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{8.5.5}$$

Сформулируем задачу одной фирмы, скажем первой, в случае конкуренции между двумя фирмами

$$\begin{aligned} &\max_{q^1,\, x_1^1,\, \ldots,\, x_n^1} \Pi^1 = p(q^1,\ q^2)\, q^1 - \sum_{j=1}^{n} w_j(x_j^1,\ x_j^2)\, x_j^1 \\ &\text{при условии} \qquad q^1 = f^1(x_1^1,\ x_2^1,\ \ldots,\ x_n^1). \end{aligned} \tag{8.5.6}$$

Функция Лагранжа для этой задачи может быть записана в форме

$$\begin{aligned} L = p(q^1,\ q^2)\, q^1 - \sum_{j=1}^{n} w_j(x_j^1,\ x_j^2)\, x_j^1 + \\ + y\,(f^1(x_1^1,\ x_2^1,\ \ldots,\ x_n^1) - q^1), \end{aligned} \tag{8.5.7}$$

где через y обозначен множитель Лагранжа. Условия первого порядка для решения этой задачи будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial q^1} = p(q^1,\ q^2) + q^1 \frac{\partial p}{\partial q^1} + q^1 \frac{\partial p}{\partial q^2}\frac{\partial q^2}{\partial q^1} - y = 0 \\ &\frac{\partial L}{\partial x_j^1} = -w_j(x_j^1,\ x_j^2) - x_j^1 \frac{\partial w_j}{\partial x_j^1} - x_j^1 \frac{\partial w_j}{\partial x_j^2}\frac{\partial x_j^2}{\partial x} + \\ &\qquad + y\frac{\partial f^1}{\partial x_j^1} = 0, \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \\ &\frac{\partial L}{\partial y} = f^1(x_1^1,\ x_2^1,\ \ldots,\ x_n^1) - q^1 = 0. \end{aligned} \tag{8.5.8}$$

Исключив множитель Лагранжа, запишем $(n+1)$ условие

$$\begin{aligned} &\left[p + q^1\left(\frac{\partial p}{\partial q^1} + \frac{\partial p}{\partial q^2}\frac{\partial q^2}{\partial q^1}\right)\right]\frac{\partial f^1}{\partial x_j^1} = \\ &\qquad = w_j + x_j^1 \frac{\partial w_j}{\partial x_j^1} + \frac{\partial w_j}{\partial x_j^2}\frac{\partial x_j^2}{\partial x_j^1}, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \\ &\qquad q^1 = f^1(x_1^1,\ x_2^1,\ \ldots,\ x_n^1). \end{aligned} \tag{8.5.9}$$

Выражения

$$\partial q^2/\partial q^1 \quad \text{и} \quad \partial x_j^2/\partial x_j^1,\quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

называются здесь *предположительными вариациями*, первое из них показывает изменение в выпуске продукции второй фирмы при изменении выпуска первой фирмы, а вторая группа характеризует влияние изменений в затратах j-го вида первой фирмы на величину затрат j-го вида второй фирмы. Эти $(n+1)$ выражения являются «предположительными», потому что они должны быть выдвинуты первой фирмой, т. е. первая фирма должна сделать некоторые предположения относительно реакции конкурента на выбранную ею политику. Относительно этих выражений можно сделать разные предположения, каждое из которых ведет к различному анализу конкуренции среди немногих. Некоторые из этих альтернатив могут быть проиллюстрированы, если рассмотреть частный случай — случай дуополии.

В *дуополии* существует только два продавца товара. Если предположить, что товар однороден, производится при постоянных предельных издержках и продается согласно линейной функции спроса, то промышленный выпуск продукции равен

$$q = q^1 + q^2, \tag{8.5.10}$$

функция спроса может быть представлена в виде

$$p = a - b\,(q^1 + q^2), \quad a > 0, \quad b > 0, \tag{8.5.11}$$

а кривые издержек будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} C^1 &= cq^1 + d \\ C^2 &= cq^2 + d \end{aligned}\right\} \; c > 0, \quad d > 0, \tag{8.5.12}$$

где c — предельные издержки, а d — фиксированные издержки. Фирма 1 будет получать прибыль

$$\Pi^1 = [a - b\,(q^1 + q^2)]\; q^1 - cq^1 - d, \tag{8.5.13}$$

которую она хочет максимизировать путем выбора q^1. Запишем условия первого порядка для максимума

$$\frac{\partial \Pi^1}{\partial q^1} = [a - b\,(q^1 + q^2)] - bq^1 - b\,\frac{\partial q^2}{\partial q^1}\,q^1 - c = 0, \tag{8.5.14}$$

где $\partial q^2/\partial q^1$ — предположительная вариация, в данном случае влияние изменения выпуска продукции первой фирмы на выпуск фирмы 2.

Анализ дуополии Курно основан на предпосылке, что предположительные вариации равны нулю, т. е. что

каждый из дуополистов считает, что изменения в его собственном выпуске продукции не повлияют на конкурента. Тогда равновесие Курно можно определить как пару уровней продукции (q^1, q^2), полученную при допущении о нулевых предположительных вариациях

$$\left.\frac{\partial \Pi^1}{\partial q^1}\right|_{\frac{\partial q^2}{\partial q^1}=0} = 0$$

$$\left.\frac{\partial \Pi^2}{\partial q^2}\right|_{\frac{\partial q^1}{\partial q^2}=0} = 0. \tag{8.5.15}$$

Заметим, что даже при этом упрощении решение для (q^1, q^2) потребует одновременно решить для каждой фирмы условия первого порядка; эта существенная одновременность присуща задачам олигополий. Учитывая вышеизложенное, запишем первое условие

$$a - b\,(q^1 + q^2) - bq^1 - c = 0. \tag{8.5.16}$$

Так как $q^2 = q^1$, то равенство

$$q^1 = q^2 = \frac{a-c}{3b} \tag{8.5.17}$$

представляет собой равновесие Курно. Тогда равновесные рыночные цены и промышленный выпуск продукции будут определяться по формулам

$$p = \frac{a+2c}{3}, \quad q = \frac{2\,(a-c)}{3b}. \tag{8.5.18}$$

Эти результаты могут быть обобщены на случай F фирм; тогда имеем

$$q^f = \frac{a-c}{(F+1)\,b}, \quad f = 1, \ldots, F$$

$$p = \frac{a+Fc}{F+1} \tag{8.5.19}$$

$$q = \frac{F}{F+1}\,\frac{(a-c)}{b}.$$

В пределе, по мере того как число фирм приближается к бесконечности, равновесие Курно стремится к равновесию в условиях совершенной конкуренции. Если $F \to \infty$, индивидуальные объемы $q^f \to 0$, а цены $p \to c$, эти значения являются конкурентным равновесием, при котором каждая фирма производит ничтожно малое количество продукции и поэтому не влияет на цену товара; в этом случае цена равновесия равна предельным издержкам.

Динамику при подходе Курно можно анализировать с помощью *кривых реакции*, которые показывают оптимальный выпуск продукции каждой фирмой при заданных выпусках продукции конкурентом. Предположив временной лаг, равный одному периоду, и используя упомянутые уравнения для равновесия Курно, запишем следующие формулы для кривых реакции:

$$q^1(t+1)=\frac{a-c-bq^2(t)}{2b}, \quad q^2(t+1)=\frac{a-c-bq^1(t)}{2b}. \qquad (8.5.20)$$

Решением этой пары разностных уравнений являются траектории движения двух выпусков во времени t. Кривые реакции и некоторые упорядоченные траектории показаны на рис. 8.8. Например, начиная из $(0, \bar{q}^2)$, первая фирма устанавливает выпуск продукции, тогда вторая фирма «подгоняет» свой выпуск к этому новому выпуску фирмы

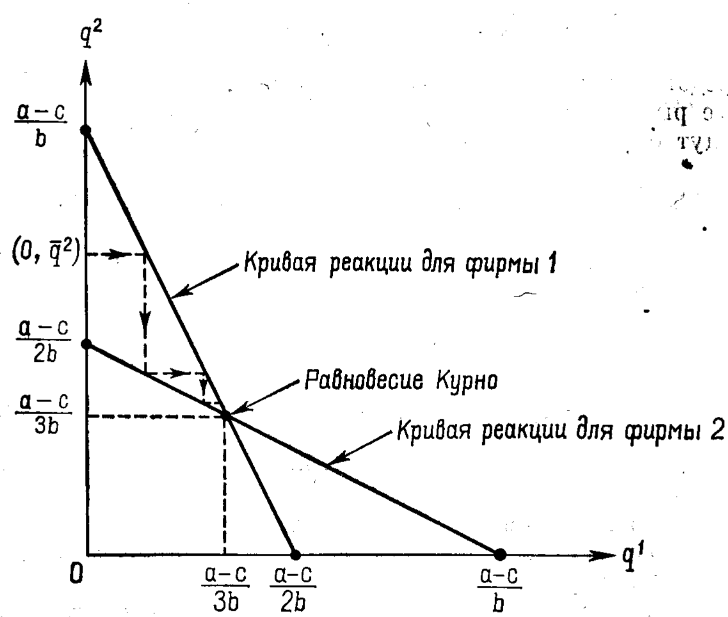

Рис. 8.8. Кривые реакции и равновесие Курно для дуополии.

1 и т. д. до тех пор, пока не будет достигнута точка равновесия Курно. На каждом шаге этого процесса динамической подгонки изменение выпуска одной фирмы вызывает изменение выпуска другой. Тем не менее обе фирмы принимают допущение Курно о том, что выпуск конкурента зафиксирован. Из этого следует, что предположение Курно, беспрестанно опровергаемое динамикой решения, является достаточно наивным.

При более сложном анализе учитывается вероятная реакция конкурента, т. е. допускается ненулевая предположительная вариация. Примером может служить *анализ дуополии Стэкельберга*, когда одна или обе фирмы считают, что конкурент будет вести себя, как дуополист Курно. В вышеизложенном примере предположим: фирма 1 полагает, что фирма 2 будет реагировать соответственно кривой реакции Курно

$$q^2=\frac{a-c-bq^1}{2b}. \qquad (8.5.21)$$

Тогда предположительная вариация будет равна

$$\frac{\partial q^2}{\partial q^1}=-\frac{1}{2}, \qquad (8.5.22)$$

поэтому, используя (8.5.14), получим

$$\frac{\partial \Pi^1}{\partial q^1}=\left[a-b(q^1+q^2)-bq^1-c+\frac{1}{2}bq^1\right]=0, \qquad (8.5.23)$$

и кривая реакции фирмы 1 будет иметь следующий вид:

$$q^1=\frac{a-c-bq^2}{\frac{3}{2}b}. \qquad (8.5.24)$$

Тогда результаты для обеих фирм будут зависеть от поведения фирмы 2. Если фирма 2 пользуется кривой реакции Курно, как полагает фирма 1, то решением является *равновесие Стэкельберга* для фирмы 1

$$q^1=\frac{a-c}{2b}, \quad q^2=\frac{a-c}{4b}. \qquad (8.5.25)$$

Здесь фирма 1 получает большую прибыль, а фирма 2 — меньшую, чем при равновесии Курно. Однако предположим, что фирма 2 не пользуется кривой реакции Курно, а действует сама согласно кривой реакции Стэкельберга, т. е. каждая фирма неправильно предполагает, что другая использует наивное допущение Курно. В результате получаем *неравновесие Стэкельберга*

$$q^1 = q^2 = \frac{a-c}{\frac{5}{2}b}, \qquad (8.5.26)$$

при котором обе фирмы получают меньшую прибыль, чем при равновесии Курно. Различные результаты могут быть проиллюстрированы матрицей выплат, как показано на табл. 8.2, где две наличные стратегии каждой фирмы выражаются кривой реакции Курно и кривой реакции Стэкельберга, а выплаты характеризуют прибыль, полученную двумя фирмами [1].

Таблица 8-2

Матрица выплат для двух фирм, каждая из которых может выбрать либо кривую реакции Курно, либо кривую реакции Стэкельберга

		Фирма 2: Кривая реакции Курно	Фирма 2: Кривая реакции Стэкельберга
Фирма 1	Кривая реакции Курно	(32, 32) Равновесие Курно	(18, 36) Равновесие Стэкельберга для фирмы 2
Фирма 1	Кривая реакции Стэкельберга	(36, 18) Равновесие Стэкельберга для фирмы 1	(23, 23) Неравновесие Стэкельберга

Еще один способ иллюстрации этих различных решений показан на рис. 8.9, на котором приведены кривые реакции рис. 8.8. На рис. 8.9 также показаны изопрофиты, которые представляют собой геометрические места равных прибылей для каждой фирмы. При этом под прибылью имеется в виду высшая для обеих фирм «монопольная точка» на оси. Кривые реакции соединяют точки, характеризующие максимум кривых равной прибыли для каждой фирмы. Кривые реакции пересекаются в точке

[1] Здесь предполагается, что $(a-c)^2/b = 288$, $d = 0$. Надо отметить, что терминология дуополии *не* согласована с терминологией теории игр. Единственной точкой равновесия в смысле теории игр в табл. 8.2 является неравновесие Стэкельберга.

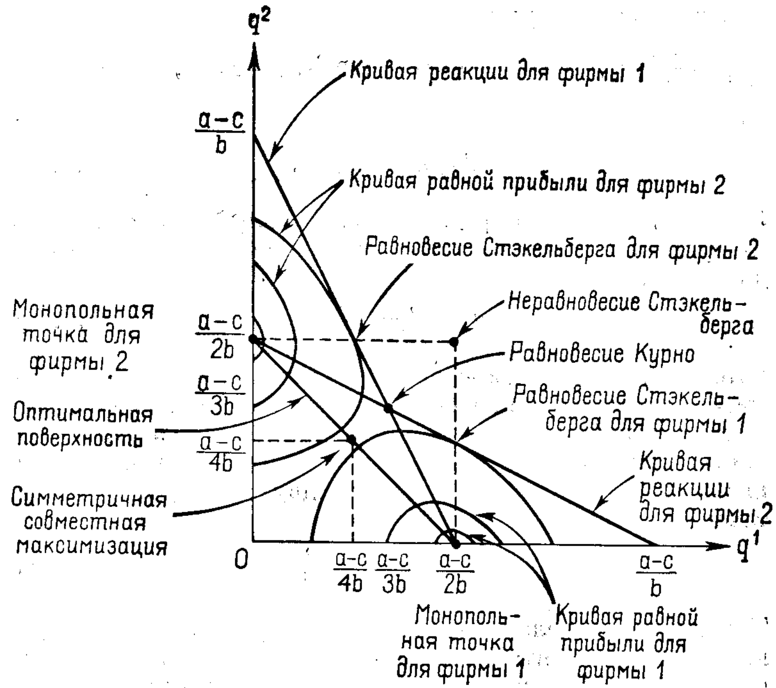

Рис. 8.9. Различные решения для дуополии.

равновесия Курно так же, как показано на табл. 8-2. Равновесие Стэкельберга для фирмы 1 находится в точке касания кривой равной прибыли для фирмы 1 с кривой реакции второй фирмы; равновесие Стэкельберга для фирмы 2 находится в точке, в которой кривая равной прибыли для фирмы 2 касается кривой реакции первой фирмы. Неравновесие Стэкельберга лежит выше равновесия Курно.

На рис. 8.9 также нашли отражение и другие возможные решения. Предположим, что фирмы пришли к соглашению *максимизировать общую прибыль*. Тогда они бы индивидуально выбрали такие q^1 и q^2, которые бы максимизировали общую прибыль

$$\max_{q^1,\, q^2} \Pi = \Pi^1 + \Pi^2 = [a - b(q^1+q^2)](q^1+q^2) - c(q^1+q^2) - 2d. \qquad (8.5.27)$$

Решение должно удовлетворять условию

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q^1} = \frac{\partial \Pi}{\partial q^2} = [a - b(q^1 + q^2)] - b(q^1 + q^2) - c = 0, \qquad (8.5.28)$$

так что

$$q^1 + q^2 = \frac{a-c}{2b}. \qquad (8.5.29)$$

Это соотношение определяет *оптимальную поверхность* на рис. 8.9. Центр этой оптимальной поверхности находитдится в точке

$$q^1 = q^2 = \frac{a-c}{4b}, \qquad (8.5.30)$$

которая является симметричной точкой совместной максимизации. Оптимальная поверхность соединяет «монопольные точки» $[(a-c)/2b, 0]$ и $[0, (a-c)/2b]$, и эту поверхность можно определить как геометрическое место точек касания кривых равной прибыли двух фирм, т. е. таких точек, для которых выполняется

$$\frac{\partial \Pi^1/\partial q^1}{\partial \Pi^1/\partial q^2} = \frac{\partial \Pi^2/\partial q^1}{\partial \Pi^2/\partial q^2}. \qquad (8.5.31)$$

Так как в пределах этой поверхности ни одна из фирм не может увеличить свою прибыль, не уменьшив прибыль конкурента, то ее можно рассматривать как оптимальную поверхность по Парето для дуополистов.

Таким образом, даже в простейшем случае дуополии можно привести несколько типов решения. На самом деле существует еще больше возможных подходов к этой простой задаче и намного больше — к общей задаче конкуренции среди немногих. Избыток решений задачи аналогичен такому же богатству решений игровых задач с более чем двумя игроками. На самом деле некоторые типы решений, предложенные здесь, прямо противоречат правилам теории игр. Примеров этому очень много. Что касается полных теорий для предельного случая игр одного или двух лиц или игр с бесконечным числом игроков, то они существуют для единичного монополиста или монопсониста и в задачах, где частных фирм так много и они так малы, что не могут повлиять на цены; это случай совершенной конкуренции. В промежуточных случаях, когда имеется несколько игроков или несколько конкурирующих фирм, существует много возможных подходов, но единой теории нет и вряд ли она возможна.

ЗАДАЧИ

8-А. Для каждой производственной функции, показанной в табл. 8.1:

1. Доказать соответствующие результаты для σ и ε.
2. Показать геометрически кривые полного физического продукта, среднего физического продукта и предельного физического продукта.
3. Распространить рассуждения на n продуктов.

8-Б. Для производственной функции CES доказать, что

1. При $\beta \to -1$ функция CES принимает вид линейной производственной функции.
2. При $\beta \to 0$ функция CES принимает вид производственной функции Кобба — Дугласа.
3. При $\beta \to \infty$ функция CES принимает вид производственной функции затрат — выпуска.

В каждом случае показать, как параметры соответствующей производственной функции зависят от параметров функции CES (например, для 8-Б. 2 показать, как b_0, b_1 и b_2 определяются через e_0, e_1, e_2, β и h при $\beta \to 0$).

8-В. Некоторые авторы определяли закон убывающей доходности как очевидное уменьшение скорее среднего, чем предельного продукта. Показать, что ни одно из этих двух утверждений не является следствием другого. В частности,

1. Показать, что производственная функция
$$f(x_1, x_2) = x_2 \frac{2x_1^2 + x_2^2}{3x_1^2 + x_2^2}$$
имеет убывающий предельный продукт (для x_2), но не имеет убывающего среднего продукта.
2. Показать, что производственная функция
$$f(x_1, x_2) = x_2 \frac{4x_1^2 + x_2^2}{3x_1^2 + x_2^2}$$
имеет убывающий средний продукт (для x_2), но не имеет убывающего предельного продукта.

8-Г. По отношению к последней задаче показать, что если предельный продукт убывает повсюду, то и средний продукт также убывает повсюду. Показать на примере, что обратное утверждение неверно. Проиллюстрировать геометрически.

8-Д. Показать, что если производственная функция характеризуется убывающей предельной нормой замещения и возрастанием дохода от расширения масштаба производства, то она квазивогнута, но не вогнута. Привести пример такой функции в случае двух видов затрат.

8-Е. Показать, что если производственная функция

$$q = f(x_1, x_2)$$

характеризуется постоянным доходом от расширения масштаба производства, то:

1. Разделяющие линии и лучи, проходящие через начало координат, и — в экономической области — предельные и средние продукты обоих видов затрат являются убывающими функциями затрат.

2. Равнопропорциональное изменение затрат не влияет на предельный и средний продукт, которые зависят только от соотношения затрат x_2/x_1.

3. Эластичность замещения имеет вид

$$\sigma = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}}{q\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}}$$

и σ можно выразить как функцию отношения факторов x_2/x_1.

4. При заданных ценах путь расширения является лучом, проходящим через начало координат, кривая издержек линейна (постоянные предельные издержки); фактическая оплата затрат зависит только от соотношения факторов; существует *граница цен факторов*, характеризующая фактическую оплату одного вида затрат как функцию фактической оплаты другого вида затрат. Найти эластичность границы цен факторов.

8-Ж. Производственная функция $q = f(\mathbf{x})$ является супераддитивной, если

$$f(\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2) \geqslant f(\mathbf{x}^1) + f(\mathbf{x}^2),$$

где $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ — некоторые векторы затрат.

1. Показать, что супераддитивная производственная функция имеет возрастающий интегральный доход от расширения масштаба производства

$$f(k\mathbf{x}) \geqslant kf(\mathbf{x}),$$

k—положительный множитель, но не имеет просто возрастающего дохода от расширения масштаба производства.

2. Показать, что если производственная функция супераддитивна и, кроме того,

$$f(\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2) = f(\mathbf{x}^1) + f(\mathbf{x}^2), \text{ если } \mathbf{x}^1 = c\mathbf{x}^2,\ c = \text{const},$$

то она характеризуется постоянным доходом от расширения масштаба производства.

8-З. При заданных ценах найти функции спроса на затраты и функции предложения продукции для фирмы, использующей два вида затрат при производстве готовой продукции и технология которой отражена

а) производственной функцией Кобба — Дугласа;

б) производственной функцией затрат — выпуска;

в) производственной функцией CES.

8-И. Для фирмы, характеризующейся в краткосрочном периоде условием, что она должна использовать по крайней мере определенное минимальное количество каждого вида затрат, описать условия первого порядка и интерпретировать геометрически в терминах изокост и изоквант равновесие при максимизации прибыли.

8-К. Вывести результаты сравнительной статики для компенсированного изменения в оплате одного вида затрат, где компенсация, принимающая форму изменения цен продукции, гарантирует, что оптимальный уровень выпуска продукции остался неизменным.

В частности, показать, что общий эффект от изменения в оплате одного вида затрат можно подразделить на *влияние замены*, при которой выпуск продукции остается постоянным, и *влияние масштаба производства*, при котором объем выпуска продукции изменяется.

8-Л. Фирма в условиях конкуренции с *указанным нормированием* дополнительно к денежным платам за затраты должна платить государству указанную плату $\bar{w}_j$ за единицу используемого вида затрат j, где

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{w}_j x_j \leqslant \bar{I},$$

$\bar{I}$ обозначает общий объем средств, предоставленных фирме. Получите новые

а) условия равновесия;

б) функции спроса на затраты и функции предложения продукции;

в) результаты сравнительной статики.

8-М. Кривая издержек характеризует минимальные издержки при производстве различных объемов продукции $C(q)$, где затраты «закупаются» на конкурентном рынке.

1. Используя метод классического программирования, построить кривую издержек (т. е. решить задачу на минимум издержек при заданном уровне выпуска продукции). Описать условия первого и второго порядков.

2. Для фирмы в условиях совершенной конкуренции найти кривую издержек, используя производственную функцию Кобба — Дугласа.

3. Показать, что

$$C = Aq^{1/\varepsilon},$$

где ε — эластичность производства, и оптимальный выпуск поэтому получается всегда при $0 < \varepsilon < 1$.

8-Н. Одним из способов описания «многопродуктовой» фирмы при использовании нескольких видов затрат для производства нескольких видов продукции является построение производственной функции

$$\Phi(\mathbf{q},\ \mathbf{x}) = \Phi(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_m;\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \leqslant 0,$$

где q_i обозначает уровень выпуска продукции i, а x_j — уровень затрат вида j и где

$$\frac{\partial\Phi}{\partial q_i} \leqslant 0, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} \geqslant 0, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Тогда прибыль определяется по формуле

$$\Pi(\mathbf{q},\ \mathbf{x}) = \mathbf{pq} - \mathbf{wx} = \sum_{i=1}^{m} p_i q_i - \sum_{j=1}^{n} w_j x_j,$$

где **p** и **w** — векторы заданных цен затрат и выпуска соответственно. Найти необходимые условия равновесия, решив задачу

$$\max_{\mathbf{q},\,\mathbf{x}} \Pi(\mathbf{q},\mathbf{x}) \quad \text{при условии} \quad \Phi(\mathbf{q},\ \mathbf{x}) \leqslant 0,\ \mathbf{q} \geqslant 0,\ \mathbf{x} \geqslant 0.$$

8-О. По отношению к последней задаче одним из способов описания технологии «составные затраты — составной выпуск» является анализ способов производственной деятельности, при котором фирма выбирает неотрицательные уровни способов производственной деятельности $\mathbf{y} = (y_1,\ \ldots,\ y_p)'$ для производства выпуска продукции

$$\mathbf{q} = \mathbf{Ay},$$

используя вектор затрат

$$\mathbf{x} = \mathbf{By},$$

где **A** — заданная матрица $m \times p$; **B** — заданная матрица $n \times p$. Найти оптимальные уровни способов производственной деятельности. При каких обстоятельствах уровень деятельности равен нулю?

8-П. Пусть монополист характеризуется линейным предельным валовым доходом и квадратической кривой предельных издержек

$$MR = a - bq$$

$$MC = c - dq + eq^2,$$

где издержки зафиксированы на уровне f, а все параметры положительны.

1. Найти валовой доход, издержки, спрос и средние издержки.

2. Найти прибыль, максимизирующую выпуск продукции, и максимальную прибыль.

3. Найти ставку акцизного сбора (налог с единицы продаваемого товара), который максимизирует доход от налогов.

4. Найти наивысшую цену, которая максимизирует выпуск продукции.

8-Р. Найти оптимальное множество выбора переменных для *дискриминирующего монополиста*, продающего свою продукцию на двух различных рынках, на каждом из которых существует заданная функция спроса. Будет ли выпуск больше у дискриминирующего или у недискриминирущего монополиста?

8-С. В фирме Баумоля целью управляющих является максимизация объема продаж при ограничении, означающем, что прибыль не снизится ниже заданного уровня [22].

1. Определить равновесный уровень затрат и выпуска продукции. Проиллюстрировать геометрически.

2. Описать результаты сравнительной статики.

3. Противопоставить влияние акцизного сбора, налога на валовую выручку от продажи и налога на прибыль фирмы Баумоля с аналогичными налогами на фирму, стремящуюся к максимизации прибыли.

8-Т. Расходы на рекламу могут увеличить валовой доход, но при этом уменьшить прибыль

$$\Pi = R(q, A) - C(q) - A,$$

где A характеризует расходы на рекламу и

$$\frac{\partial R}{\partial A} > 0.$$

Каков оптимальный уровень расходов на рекламу?

8-У. Противопоставить решение Курно для дуополии *решению Бертрана*, в котором каждая фирма устанавливает свою цену, предполагая, что другие не изменяют свою. Описать решение Бертрана алгебраически и геометрически. Показать, что в анализе Бертрана возможны колебания цен, если введены верхние лимиты на выпуск каждой фирмы.

8-Ф. *Особая кривая спроса* в теории олигополий основывается на предположении, что если фирма снижает цену, то конкуренты также снизят свои цены, но, если фирма повышает цену, конкуренты не последуют ее примеру. Таким образом, кривая спроса для фирмы относительно эластична ($\varepsilon > 1$) над общераспространенными ценами и относительно неэластична ($\varepsilon < 1$) ниже этих цен. Показать равновесие геометрически и объяснить, почему цены имеют тенденцию к устойчивости в такой ситуации.

8-Х. Экономика содержит F конкурирующих фирм, и функция спроса фирмы f на затраты i-го вида имеет следующий вид:

$$x_i^f = x_i^f(p, w_1, w_2, \ldots, w_n); \; i = 1, 2, \ldots, n, \; f = 1, 2, \ldots, F,$$

где p — цена выпуска и $w_1, w_2, \ldots, w_n$ — цены затрат. Общий спрос на n видов затрат характеризуется суммированием индивидуальных функций спроса

$$X_i = \sum_{f=1}^{F} x_i^f, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Показать, что

$$\frac{\partial X_i}{\partial w_j} = \frac{\partial X_j}{\partial w_i}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$