ЧАСТЬ III

Применение статической оптимизации

Глава 7
Теория личного потребления

Одним из основных элементов экономической теории является *домашнее хозяйство* (*потребитель*), определяемое как некоторая группа индивидуумов, распределяющая свой доход на покупку и потребление товаров и услуг [1]. Проблема рационального ведения хозяйства потребителя (см. табл. 1-1) заключается в решении вопроса о том, какое количество каждого наличного товара или услуг он должен приобрести при заданных ценах и известном доходе. Объектом анализа данной главы является отдельный потребитель такого типа; в гл. 9 рассматривается экономика, характеризующаяся множествами взаимодействующих потребителей (и фирм).

7.1. ПРОСТРАНСТВО ТОВАРОВ

Поведение потребителя, рассматриваемое с точки зрения рационального ведения хозяйства, математически выражается в выборе некоторой точки из «пространства товаров». Под *товаром* мы будем понимать некоторое благо или услугу, поступившие в продажу в определенное время в определенном месте. Предположим, существует конечное число наличных товаров n; количества каждого из них, приобретенные потребителем, характеризуются *набором товаров*

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)', \tag{7.1.1}$$

т. е. n-мерным вектором-столбцом, в котором x_j обозначает количество j-го блага, приобретенного потребителем,

---

[1] Основные работы по теории потребления [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8].

$j = 1, 2, \ldots, n$. Будем считать, что все товары обладают свойством произвольной делимости, так что может быть куплено любое неотрицательное количество каждого из них. Тогда все возможные наборы товаров являются векторами *пространства товаров*

$$C = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)' \mid x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \ldots, n\}. \tag{7.1.2}$$

Таким образом, пространство C является неотрицательным ортантом евклидова пространства, замкнутым и выпуклым множеством.

7.2. ОТНОШЕНИЕ ПРЕДПОЧТЕНИЯ

Выбор потребителем некоторого набора товаров отчасти зависит от его вкусов. Они характеризуются слабым отношением предпочтения, «*предпочтительнее, чем*» *или* «*равноценен*», которое записывается знаком $\succcurlyeq$. Это отношение является одним из основных простейших понятий теории потребления. Таким образом, запись

$$\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}, \tag{7.2.1}$$

где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ являются наборами товаров (точками пространства товаров C), означает, что рассматриваемый потребитель либо предпочитает набор $\mathbf{x}$ набору $\mathbf{y}$, либо не делает между ними различий, т. е. $\mathbf{x}$ по крайней мере так же хорош, как и $\mathbf{y}$, согласно вкусам этого покупателя. Тогда можно определить понятия безразличия и строгого предпочтения в терминах слабого отношения предпочтения: наборы товаров $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ безразличны для потребителя (записывается $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$) тогда и только тогда, когда каждый из них предпочтительнее или безразличен по отношению к другому, т. е.

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y}, \text{ если и только если } \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \quad \text{и} \quad \mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x} \tag{7.2.2}$$

и потребитель предпочитает набор $\mathbf{x}$ набору $\mathbf{y}$ (записывается $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$), если и только если $\mathbf{x}$ предпочтительнее или безразличен $\mathbf{y}$, а $\mathbf{y}$ не предпочтителен или не безразличен $\mathbf{x}$.

$\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, если и только если $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$, а отношение $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}$ несправедливо. (7.2.3)

В дальнейшем будет предполагаться, что слабое отношение предпочтения удовлетворяет двум основным аксиомам. Первая из них утверждает, что это отношение является совершенной полуупорядоченностью в *пространстве товаров* C. Отношение называется совершенным, если для двух данных наборов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из C справедливо одно из двух:

$$\text{либо } \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}, \text{ либо } \mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x} \text{ (либо одновременно)}. \tag{7.2.4}$$

Это означает, что в пространстве товаров нет таких «пробелов», в которых предпочтения не существуют. Отношение называется полуупорядоченностью, если оно *транзитивно*, т. е. для трех заданных наборов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, и $\mathbf{z}$ из C выполняется условие,

$$\text{если } \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \text{ и } \mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{z}, \text{ то } \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{z}, \tag{7.2.5}$$

что выражает совместимость предпочтений, и если оно *рефлексивно*, т. е. для любого набора $\mathbf{x}$ из C

$$\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{x}, \tag{7.2.6}$$

этот факт вытекает уже из совершенности отношения.

Первая основная аксиома, утверждающая, что слабое отношение предпочтения является совершенной полуупорядоченностью пространства товаров, означает, что отношение безразличия является отношением эквивалентности, которое транзитивно, так как при заданных $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ из C,

$$\text{если } \mathbf{x} \sim \mathbf{y} \text{ и } \mathbf{y} \sim \mathbf{z}, \text{ то } \mathbf{x} \sim \mathbf{z} \tag{7.2.7}$$

рефлексивно, так как при заданном $\mathbf{x}$ из C:

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{x}, \tag{7.2.8}$$

и симметрично, так как при заданных $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из C

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \text{ означает } \mathbf{y} \sim \mathbf{x}. \tag{7.2.9}$$

Для доказательства, например, транзитивности заметим, что $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \sim \mathbf{z}$ означают по определению безразличия, что $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{z}$ и что $\mathbf{z} \succcurlyeq \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}$. Тогда по транзитивности слабого отношения предпочтения $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{z}$ и $\mathbf{z} \succcurlyeq \mathbf{x}$, из чего вытекает $\mathbf{x} \sim \mathbf{z}$. Будучи отношением эквивалентности, отношение безразличия подразделяет пространство товаров на классы эквивалентности — попарно непересекающиеся подмножества, называемые *множествами безразличия*, каждое из которых состоит из всех наборов, безразличных заданному набору $\mathbf{x}$

$$I_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y} \in C \mid \mathbf{y} \sim \mathbf{x}\}. \qquad (7.2.10)$$

Вторая основная аксиома утверждает, что слабое отношение предпочтения *непрерывно*, т. е. *предпочтительные множества*, каждое из которых состоит из всех таких наборов, которые предпочитаются или безразличны заданному набору $\mathbf{x}$

$$P_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y} \in C \mid \mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}\}, \qquad (7.2.11)$$

и *непредпочтительные множества*, каждое из которых состоит из всех наборов, для которых заданный набор $\mathbf{x}$ предпочтителен или безразличен

$$NP_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y} \in C \mid \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}\}, \qquad (7.2.12)$$

являются замкнутыми множествами пространства товаров для любого набора $\mathbf{x}$. По этой аксиоме оба множества содержат все граничные точки, причем для обоих множеств граничные точки образуют множество безразличия $I_{\mathbf{x}}$, равное пересечению $P_{\mathbf{x}} \cap NP_{\mathbf{x}}$.

Из двух основных аксиом совершенной полуупорядоченности и непрерывности следует, что существует непрерывная действительная функция, определенная на пространстве товаров $U(\cdot)$, которая называется *функцией полезности* и для которой [1]

$$U(\mathbf{x}) \geqslant U(\mathbf{y}), \text{ только если } \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}. \qquad (7.2.13)$$

---

[1] Доказательство того факта, что совершенное непрерывное упорядочение подмножества n-мерного евклидова пространства может быть представлено действительной непрерывной функцией (полезности), приведено в работах Дебре [9, 10]. Примером совершенной упорядоченности, на которой функция полезности не определена, потому что она не удовлетворяет аксиоме непрерывности, могут служить *лексикографические предпочтения*, означающие, что $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, где

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)' \quad \text{и} \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)',$$

$$\text{если } x_1 > y_1,$$

или

$$x_1 = y_1 \text{ и } x_2 > y_2$$

или

$$x_1 = y_1,\ x_2 = y_2,\ \ldots,\ x_p = y_p \text{ и } x_{p+1} > y_{p+1}.$$

Как видно из названия, эта упорядоченность может быть уподоблена составлению словаря: все слова, начинающиеся с «а», предшествуют словам, начинающимся с любой другой буквы; слова, начинающиеся с «а», упорядочиваются по второй букве и т. д.

Например, возьмем любой луч в пространстве товаров, который проходит через начало координат. Примем в качестве полезности какого-либо набора расстояние от начала до точки на луче, которая принадлежит тому же множеству безразличия, что и рассматриваемый набор. Конечно, если такая функция полезности существует, то она не единственна. Например, в качестве функции полезности одинаково хорошо может служить любая монотонная строго возрастающая функция расстояния вдоль луча и вообще, если $U(\mathbf{x})$ является функцией полезности, то ею же является и $\varphi[U(\mathbf{x})]$, где φ — строго возрастающая функция ($\varphi' > 0$). Таким образом, $aU(\mathbf{x}) + b$, где a и b — константы и $a > 0$, так же как и $e^{U(\mathbf{x})}$, могут выступать в качестве функции полезности. На самом деле образовать функцию полезности можно с помощью любого последовательного множества чисел, которому поставлены в соответствие множества безразличия таким образом, что число, соответствующее «более высокому» множеству безразличия (в направлении предпочтения), является большим, чем число, соответствующее «более низкому». Такую функцию иногда называют *порядковой функцией* полезности, а значения, принимаемые этой функцией, — *порядковыми полезностями.*

Остальные аксиомы можно сформулировать либо в терминах отношения предпочтения, либо в терминах функции полезности. Аксиома *ненасыщения* (в терминах отношения предпочтения) утверждает, что для данных двух наборов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из C

$$\begin{gathered} \mathbf{x} \geqslant \mathbf{y} \text{ (т. е. } x_j \geqslant y_j \text{ для всех } j) \text{ влечет } \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{y} \text{ и } \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \text{ влечет } \mathbf{x} \succ \mathbf{y}. \end{gathered} \qquad (7.2.14)$$

Таким образом, если $\mathbf{x}$ содержит не меньшее количество каждого товара, чем $\mathbf{y}$, то $\mathbf{x}$ должен быть предпочтительнее или равноценен $\mathbf{y}$, в то время как если $\mathbf{x}$ содержит не меньшее количество каждого товара, а одного товара содержит больше, чем $\mathbf{y}$, то $\mathbf{x}$ должен быть предпочтительнее $\mathbf{y}$. В терминах функции полезности аксиома ненасыщения утверждает:

$$\begin{gathered} \mathbf{x} \geqslant \mathbf{y} \text{ влечет } U(\mathbf{x}) \geqslant U(\mathbf{y}), \\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{y} \text{ и } \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \text{ влечет } U(\mathbf{x}) > U(\mathbf{y}). \end{gathered} \qquad (7.2.15)$$

Будем считать $U(\mathbf{x})$ дифференцируемой, тогда аксиома ненасыщения требует, чтобы все первые частные производные функции полезности, называемые *предельными полезностями*, были положительными

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \mathrm{MU}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}(\mathbf{x}),\ \frac{\partial U}{\partial x_2}(\mathbf{x}),\ \ldots,\ \frac{\partial U}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right) > 0. \tag{7.2.16}$$

Таким образом, в любой точке пространства товаров возрастание потребления любого товара при постоянном потреблении всех остальных товаров приводит к увеличению полезности.

$$\mathrm{MU}_j(\mathbf{x}) = \frac{\partial U}{\partial x_j}(\mathbf{x}) > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{7.2.17}$$

Следующая аксиома *строгой выпуклости* утверждает в терминах отношения предпочтения, что если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — различные наборы в C, такие, что $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}$, то

$$\alpha\mathbf{y} + (1-\alpha)\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{x} \text{ для всех } \alpha,\ 0 < \alpha < 1, \tag{7.2.18}$$

где выпуклая комбинация $\alpha\mathbf{y} + (1-\alpha)\mathbf{x}$ является набором, состоящим из $\alpha y_j + (1-\alpha)x_j$ единиц товара j, $j = 1, 2, \ldots, n$. На рис. 7.1 иллюстрируется множество предпочтений, удовлетворяющее этой аксиоме, где граница, множество безразличия для $\mathbf{x}$, называется *кривой безразличия*; $\mathbf{y}^1 \succ \mathbf{x}$ и $\mathbf{y}^2 \sim \mathbf{x}$ в терминах функции полезности (предположение выпуклости) означает, что

$$P_a = \{\mathbf{y} \in C \mid U(\mathbf{y}) \geqslant a\} \tag{7.2.19}$$

является строго выпуклым для всех действительных чисел

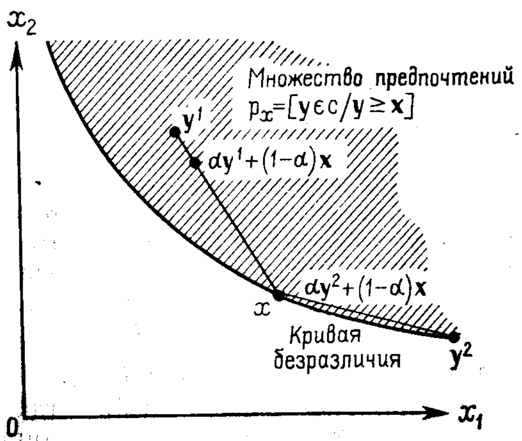

Рис. 7.1. Множество предпочтений для $n = 2$.

a, или равнозначно $U(\cdot)$ является строго квазивогнутой. Более сильное утверждение этой аксиомы, которое используется ниже, состоит в том, что при предположении, что $U(\cdot)$ является дважды дифференцируемой и имеет непрерывные вторые частные производные, матрица Гессе, состоящая из вторых частных производных, отрицательно определена

$$\mathbf{H} = \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{x}^2}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 U}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \text{(отрицательно определена).} \tag{7.2.20}$$

Это означает, что функция полезности строго вогнута. В частности,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2}(\mathbf{x}) < 0, \quad j = 1, 2, \ldots n, \tag{7.2.21}$$

т. е. предельная полезность любого товара уменьшается по мере того, как продукт потребляется. Это допущение получило название *закона Госсена*.

В табл. 7-1 приведены три типа функций полезности, соответствующие принятым допущениям. Заметим, что

Таблица 7-1

Примеры функций полезности

Тип функции полезности	Функция полезности	Ограничения
Квадратическая	$U(\mathbf{x}) = \mathbf{a}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x}$	$\mathbf{a} + \mathbf{x}'\mathbf{B} > 0$; $\mathbf{B}$ отрицательно определена
Логарифмическая (Бернулли)	$U(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} a_j \log(x_j - \bar{x}_j)$	$\left.\begin{matrix} a_j > 0 \\ x_j > \bar{x}_j \geqslant 0 \end{matrix}\right\}$ $j = 1, 2, \ldots, n$
Постоянной эластичности	$U(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{1-b_j}(x_j - \bar{x}_j)^{1-b_j}$	$\left.\begin{matrix} a_j > 0 \\ 0 < b_j < 1 \\ x_j > \bar{x}_j \geqslant 0 \end{matrix}\right\}$ $j = 1, 2, \ldots, n$

потребленные количества $\mathbf{x}$ в квадратическом случае должны быть ограничены; тогда будет удовлетворяться аксиома ненасыщения. Заметим также, что функция полезности с постоянной эластичностью сводится к логарифмической функции полезности по мере того, как все b_j приближаются к единице; в этом случае

$$MU_j = a_j (x_j - \bar{x}_j)^{-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

7.3. НЕОКЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ПОТРЕБЛЕНИЯ

Неоклассическая задача потребления заключается в выборе набора товаров и услуг при заданном отношении предпочтения (или функции полезности) и «бюджетном ограничении», которое относит потребителя к некоторому подмножеству пространства товаров.

Бюджетное ограничение означает, что денежные расходы на все товары и услуги не могут превышать денежного дохода. При этом вектор, состоящий из n цен в денежном выражении

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n), \tag{7.3.1}$$

где p_j — цена товара j и денежный доход I будут считаться заданными положительными параметрами. В таком случае бюджетное ограничение, отражающее то обстоятельство, что общий расход не может превышать дохода, будет иметь вид

$$\mathbf{px} \leqslant I, \quad \text{т. е.} \quad \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leqslant I, \tag{7.3.2}$$

где $p_j x_j$ — расход на товар j. Допустимым множеством для потребителя является множество X

$$X = \{\mathbf{x} \in C \mid \mathbf{px} \leqslant I\} = \{\mathbf{x} \in E^n \mid \mathbf{px} \leqslant I, \ \mathbf{x} \geqslant 0\}, \tag{7.3.3}$$

т. е. непустое компактное (замкнутое и ограниченное) выпуклое подмножество пространства товаров. Граница, вдоль которой $\mathbf{px} = I$, называется *бюджетной линией*. В случае $n = 2$ это — прямая, при $n = 3$ это — плоскость и в общем случае — гиперплоскость.

Таким образом, неоклассическая задача потребления заключается в выборе такого набора $\mathbf{x}^*$ из допустимого множества X, который является «самым предпочтительным», т. е. для всех остальных наборов $\mathbf{x}$, принадлежащих X, справедливо соотношение $\mathbf{x}^* \succcurlyeq \mathbf{x}$. В терминах функции полезности задача формулируется следующим образом:

$$\max_{\mathbf{x}} U(\mathbf{x}) \ \text{при условии} \ \mathbf{px} \leqslant I, \ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, \tag{7.3.4}$$

или в развернутой форме

$$\max_{x_1, x_2, \ldots x_n} U(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

при условии

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n \leqslant I \tag{7.3.5}$$

$$x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0, \ \ldots, \ x_n \geqslant 0,$$

где $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ и I — заданные положительные параметры. Здесь мы имеем задачу нелинейного программирования, в которой инструментальными переменными являются уровни потребления каждого из n товаров $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$; в качестве целевой функции выступает функция полезности $U(\mathbf{x})$, которая считается непрерывно дифференцируемой и имеет положительные первые частные производные и отрицательно определенную матрицу Гессе вторых частных производных; ограничением в форме неравенства является бюджетное ограничение, в котором функция ограничения линейна при заданных ценах $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, а константой является доход I. В силу того, что целевая функция непрерывна, а допустимое множество компактно, по теореме Вейерштрасса решение этой задачи существует, а так как целевая функция строго вогнута и допустимое множество выпукло, то по «локально глобальной теореме» оно единственно.

Необходимыми и достаточными условиями для решения этой неоклассической задачи потребления являются условия Куна—Таккера для (7.3.5). Определим функцию Лагранжа

$$L(\mathbf{x}, y) = U(\mathbf{x}) + y(I - \mathbf{px}), \tag{7.3.6}$$

где y — множитель Лагранжа, и запишем условия Куна — Таккера

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} - y\mathbf{p} \leqslant \mathbf{0}, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = I - \mathbf{px} \geqslant 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x} = \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} - y\mathbf{p}\right)\mathbf{x} = 0, \quad y\frac{\partial L}{\partial y} = y(I - \mathbf{px}) = 0, \tag{7.3.7}$$

$$\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0} \quad \mathbf{y} \geqslant 0.$$

Все переменные и частные производные здесь вычисляются в $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$, где вектор $\mathbf{x}^*$ — решение задачи (7.3.5). Таким образом,

$$\left.\begin{array}{l} MU_j(\mathbf{x}^*) \leqslant y^* p_j, \text{ но если } <, \text{ тогда } x_j^* = 0 \\ x_j^* \geqslant 0, \text{ но если } >, \text{ тогда } MU_j(\mathbf{x}^*) = y^* p_j \end{array}\right\} j = 1, 2, \ldots, n, \tag{7.3.8}$$

поэтому для всех закупленных предметов потребления справедливо соотношение (для $x_j^* > 0$)

$$\frac{1}{p_j} MU_j(\mathbf{x}^*) = y^* \text{ для всех } j, \text{ для которых } x_j^* > 0. \tag{7.3.9}$$

Это правило было сформулировано в табл. 1-1: отношение предельной полезности к цене должно быть одинаковым для всех закупленных предметов потребления. Считая, что некоторые товары были куплены, из (7.3.9) получим, что оптимальный множитель Лагранжа y^* должен быть положительным, а из этого следует по условиям Куна — Таккера, что весь доход должен быть израсходован

$$I - \mathbf{p}\mathbf{x}^* = 0, \tag{7.3.10}$$

т. е. решение лежит на бюджетной прямой. Это сразу следует из факта ненасыщения: если был использован не весь доход, то оставшуюся сумму денег можно было затратить на приобретение некоторого товара и тем самым увеличить полезность.

Считается, что потребители покупают все виды товаров и услуг (в противном случае можно уменьшить размерность пространства товаров, исключив из рассмотрения непокупаемые товары). Тогда условие (7.3.7) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) - y\mathbf{p} &= 0 \\ I - \mathbf{p}\mathbf{x} &= 0, \end{aligned} \tag{7.3.11}$$

или в развернутой форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - y p_j &= 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\ I - \sum_{j=1}^{n} p_j x_j &= 0. \end{aligned} \tag{7.3.12}$$

Эти условия выполняются только в точке $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, y^*)$, где $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)' = \mathbf{x}^*$ является решением задачи потребления. Например, в случае двух товаров решение должно удовлетворять системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1}(x_1, x_2) - y p_1 &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x_2}(x_1, x_2) - y p_2 &= 0 \\ I - p_1 x_1 - p_2 x_2 &= 0. \end{aligned} \tag{7.3.13}$$

Геометрически решение лежит в точке касания бюджетной линии и кривой безразличия, как показано на рис. 7.2. Наклон бюджетной линии равен p_1/p_2, а наклон кривой безразличия $U(x_1, x_2) = \text{const}$ находится из выражения

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = 0 \tag{7.3.14}$$

и составляет

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial U/\partial x_1}{\partial U/\partial x_2}. \tag{7.3.15}$$

В точке касания наклоны равны

$$-\frac{\partial U/\partial x_1}{\partial U/\partial x_2} = -\frac{p_1}{p_2}, \tag{7.3.16}$$

или

$$\frac{1}{p_1}\frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{1}{p_2}\frac{\partial U}{\partial x_2}. \tag{7.3.17}$$

Это условие можно получить из (7.3.13), исключив множитель Лагранжа.

Оптимальный множитель Лагранжа, равный общему отношению предельной полезности к цене в (7.3.17), измеряется в полезности единицы товара j, деленной на количество долларов на единицу товара j, что сводится к полезности на доллар. y^* следует интерпретировать как предельную полезность добавочного дохода

$$y^* = \frac{\partial U^*}{\partial I}, \text{ где } U^* = U(\mathbf{x}^*), \tag{7.3.18}$$

которая называется иногда предельной полезностью денег. $(n+1)$ условий (7.3.11) являются условиями первого порядка для классической задачи математического программирования

$$\max_{\mathbf{x}} U(\mathbf{x}) \text{ при условии } \mathbf{p}\mathbf{x} = I. \tag{7.3.19}$$

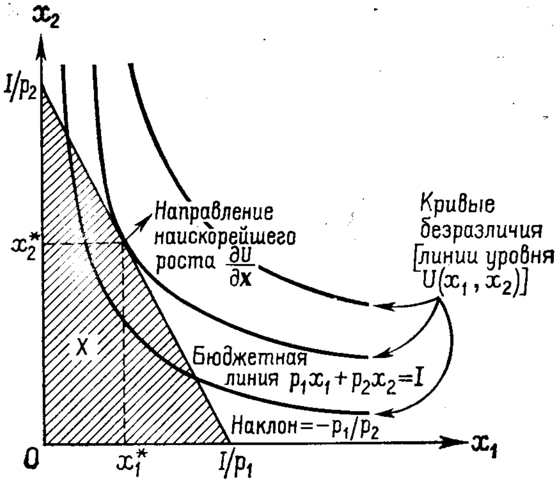

Рис. 7.2. Решение в точке касания для неоклассической задачи.

Условия второго порядка для этой задачи формулируются с помощью окаймленной матрицы Гессе

$$\begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{p} \\ -\mathbf{p}' & \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 \ldots & -p_n \\ -p_1 & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) \ldots & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \ldots & \vdots & & \\ -p_n & \frac{\partial^2 U}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 U}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}) \ldots & \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \tag{7.3.20}$$

полученной окаймлением $\mathbf{H}$ ценами; условия заключаются в том, что последние $(n-1)$ главных миноров должны менять знак, в то время как первый положителен. Эти условия удовлетворяются, так как матрица Гессе считается отрицательно определенной. Таким образом, условия (7.3.11) являются необходимыми и достаточными, $(n+1)$ условий первого порядка

$$\begin{aligned} \psi^1(y, \mathbf{x}, \mathbf{p}, I) &= I - \mathbf{px} = 0 \\ \Psi^2(y, \mathbf{x}, \mathbf{p}, I) &= \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) - y\mathbf{p} = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{7.3.21}$$

могут быть разрешены относительно $(n+1)$ неизвестных y, $\mathbf{x}$, если определитель соответствующей матрицы Якоби не равен нулю. Записав матрицу Якоби, мы видим, что она равна

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi^1}{\partial y} & \frac{\partial \psi^1}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial \Psi^2}{\partial y} & \frac{\partial \psi^2}{\partial \mathbf{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{p} \\ -\mathbf{p}' & \mathbf{H} \end{pmatrix}, \tag{7.3.22}$$

окаймленной матрице Гессе (7.3.20), которая действительно имеет определитель, не равный нулю, так как матрица $\mathbf{H}$ отрицательно определена и потому невырожденна (обратная матрица к матрице Якоби приведена ниже). Решение задачи может быть получено в виде функций ее параметров

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I) \\ y^* &= y^*(\mathbf{p}, I). \end{aligned} \tag{7.3.23}$$

Первые n уравнений называются *функциями спроса* на каждый продукт; они характеризуют количественные значения спроса как функцию от цен на все товары и дохода

$$x_j^* = x_j^*(p_1, p_2, \ldots, p_n, I), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{7.3.24}$$

Последнее уравнение выражает оптимальный множитель Лагранжа как функцию цен и дохода, причем y^* по (7.3.18) представляет собой количество, на которое увеличится оптимальный уровень полезности, если произойдет малое приращение дохода. Все $(n+1)$ уравнений единственным образом определяют $\mathbf{x}^*$ и y^*, при этом функции $\mathbf{x}^*(\cdot\cdot)$ и $y^*(\cdot\cdot)$ имеют непрерывные первые частные производные в некоторой малой окрестности решения системы (7.3.21).

Важным свойством функций спроса является их однородность нулевой степени относительно всех цен и дохода, т. е. значения спроса инвариантны по отношению к пропорциональным изменениям цен и дохода

$$\mathbf{x}^*(\alpha\mathbf{p}, \alpha I) = \mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I) \text{ для всех } \alpha > 0. \tag{7.3.25}$$

Это свойство сразу же вытекает из самой постановки задачи: пропорциональное изменение всех цен и дохода не влияет на допустимое множество и значение целевой функции. По однородности спрос на любой продукт зависит от отношений цен, которые называются *относительны-*

ми ценами, и от отношения денежного дохода к некоторой цене, которое называется *реальным доходом*. Выбрав какой-либо товар, скажем товар 1, в качестве «единицы счета» и полагая коэффициент пропорциональности в (7.3.25) $\alpha = 1/p_1$, функции спроса можно записать в виде

$$x_j^* = x_j^* \left(1, \frac{p_2}{p_1}, \frac{p_3}{p_1}, \ldots \frac{p_n}{p_1}, \frac{I}{p_1}\right), \ j = 1, 2, \ldots n. \quad (7.3.26)$$

Это выражение показывает зависимость спроса от относительных цен p_2/p_1, p_3/p_1, ..., p_n/p_1 и реального дохода I/p_1. Конечно, любой товар с положительной ценой может быть выбран в качестве «единицы счета» (товар j считается *единицей счета*, если $\alpha = {}^1/p_j$). Может случиться так, что в качестве α выбран $\frac{1}{I}$ или $1/\sum_{j=1}^{n} p_j$; последний случай будет встречаться в дальнейших главах книги.

7.4. СРАВНИТЕЛЬНАЯ СТАТИКА ПОТРЕБЛЕНИЯ

Метод сравнительной статики заключается в изучении чувствительности решения задачи рационального ведения хозяйства к изменениям ее параметров путем сравнения положения оптимума в статике до и после того, как параметры изменились. Этот метод применяется в неоклассической теории потребления для того, чтобы определить, как влияет на оптимальные количества товаров изменение $(n + 1)$ параметров, цен и дохода [11, 1, 3, 12, 13].

По результатам последнего раздела $(n + 1)$ условий первого порядка для задачи потребления (7.3.11) могут быть разрешены относительно оптимальных количеств всех продуктов и оптимального множителя Лагранжа в виде функций цен и дохода, как в (7.3.23). Подставляя эти функции в условия первого порядка, получим систему, состоящую из $(n + 1)$ тождеств:

$$I - \mathbf{p}\mathbf{x}^* (\mathbf{p}, I) \equiv 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x}^* (\mathbf{p}, I)) - y^* (\mathbf{p}, I)\, \mathbf{p} \equiv 0. \quad (7.4.1)$$

Показатели сравнительной статики можно получить, если продифференцировать эти $(n + 1)$ тождеств по параметрам $\mathbf{p}$ и I.

Сначала рассмотрим влияние изменения дохода I. Дифференцируя (7.4.1) по I, получим систему

$$1 - \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j^*}{\partial I} = 0$$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial x_k^*}{\partial I} - p_j \frac{\partial y^*}{\partial I} = 0, \ j = 1, 2, \ldots, n, \quad (7.4.2)$$

где $\partial x_1^*/\partial I$, $\partial x_2^*/\partial I$, ..., $\partial x_n^*/\partial I$ и $\partial y^*/\partial I$ отражают степень чувствительности по отношению к изменениям дохода. При использовании векторно-матричных обозначений, где

$$\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial I} = \left(\frac{\partial x_1^*}{\partial I}, \frac{\partial x_2^*}{\partial I}, \ldots, \frac{\partial x_n^*}{\partial I}\right)', \quad (7.4.3)$$

уравнения (7.4.2) примут вид

$$-\mathbf{p} \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial I} = -1$$
$$-\mathbf{p}' \frac{\partial y^*}{\partial I} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial I} = 0. \quad (7.4.4)$$

Представим эти уравнения в виде матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{p} \\ -\mathbf{p}' & \mathbf{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y^*}{\partial I} \\ \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (7.4.5)$$

где матрицей коэффициентов является окаймленная матрица Гессе.

Теперь рассмотрим влияние изменения одной цены, причем остальные цены и доход предполагаются неизменными. Дифференцируя (7.4.1) по p_l, получим

$$-x_l^* - \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j^*}{\partial p_l} = 0$$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial x_k^*}{\partial p_l} - p_j \frac{\partial y^*}{\partial p_l} - y^* \delta_{jl} = 0, \ j = 1, 2, \ldots, n, \quad (7.4.6)$$

где δ_{jl} — дельта Кронекера, равная единице, если $j = l$, и нулю в противоположном случае. Все характеристики чувствительности могут быть записаны в виде матрицы

$$\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} & \frac{\partial x_1^*}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial x_1^*}{\partial p_n} \\ \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} & \frac{\partial x_2^*}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial x_2^*}{\partial p_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_n^*}{\partial p_1} & \frac{\partial x_n^*}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial x_n^*}{\partial p_n} \end{pmatrix} \qquad (7.4.7)$$

и вектора-строки

$$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{p}} = \left(\frac{\partial y^*}{\partial p_1}, \frac{\partial y^*}{\partial p_2}, \ldots, \frac{\partial y^*}{\partial p_n} \right), \qquad (7.4.8)$$

так что, используя векторно-матричные обозначения, уравнения (7.4.6) для $l = 1, 2, \ldots, n$ можно записать в виде системы

$$-\mathbf{p} \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{x}^{*\prime}$$

$$-\mathbf{p}' \frac{\partial y^*}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}} = y^* \mathbf{I}_n, \qquad (7.4.9)$$

или, что эквивалентно,

$$\begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{p} \\ \mathbf{p}' & \mathbf{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y^*}{\partial \mathbf{p}} \\ \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{*\prime} \\ y^* \mathbf{I}_n \end{pmatrix}, \qquad (7.4.10)$$

где $\mathbf{I}_n$ — единичная матрица размерности $n \times n$.

Наконец, рассмотрим влияние *компенсированного* изменения цены, при котором доход компенсируется таким образом, чтобы полезность оставалась неизменной. Так как

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = y\mathbf{p}\,(d\mathbf{x})$$

$$dI = \mathbf{p}\,(d\mathbf{x}) + (d\mathbf{p})\, \mathbf{x}, \qquad (7.4.11)$$

то, для того чтобы U оставалось неизменным ($dU = 0$), необходимо, что $\mathbf{p}\,(d\mathbf{x}) = 0$, а это справедливо, если $dI = (d\mathbf{p})\, \mathbf{x}$. Если, в частности, p_l возрастает до $p_l + dp_l$, то дополнительный доход $dI = (dp_l)\, x_l$ обеспечит неизменную полезность. Дифференцируя (7.4.1) по p_l, когда $dI = (dp_l)\, x_l$, получаем

$$-\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j^*}{\partial p_l} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial x_k^*}{\partial p_l} - p_j \frac{\partial y^*}{\partial p_l} - y^* \delta_{jl} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (7.4.12)$$

Эти уравнения для $l = 1, 2, \ldots, n$ можно записать в виде системы

$$-\mathbf{p} \left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}} \right)_{\text{comp}} = 0 \qquad (7.4.13)$$

$$-\mathbf{p}' \left(\frac{\partial y}{\partial \mathbf{p}} \right)_{\text{comp}} + \mathbf{H} \left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}} \right)_{\text{comp}} = y^* \mathbf{I}_n,$$

где $\left(\frac{\partial x^*}{d\mathbf{p}} \right)_{\text{comp}}$ и $\left(\frac{\partial y^*}{d\mathbf{p}} \right)_{\text{comp}}$ определяются из соотношений (7.4.7) и (7.4.8), и считается, что доход компенсируется таким образом, что полезность остается неизменной. Запишем эквивалентное выражение

$$\begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{p} \\ -\mathbf{p}' & \mathbf{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial y^*}{\partial \mathbf{p}} \right)_{\text{comp}} \\ \left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}} \right)_{\text{comp}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y^* \mathbf{I}_n \end{pmatrix}. \qquad (7.4.14)$$

Все три результата дифференцирования, данные в (7.4.5), (7.4.10) и (7.4.14), могут быть обобщены одним матричным уравнением

$$\begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{p} \\ -\mathbf{p}' & \mathbf{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y^*}{\partial I} & \frac{\partial y^*}{\partial \mathbf{p}} & \left(\frac{\partial y^*}{\partial \mathbf{p}} \right)_{\text{comp}} \\ \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial I} & \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}} & \left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}} \right)_{\text{comp}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{x}^{*\prime} & 0 \\ 0 & y^* \mathbf{I}_n & y^* \mathbf{I}_n \end{pmatrix}, \qquad (7.4.15)$$

которое является *основным матричным уравнением теории потребления.* Поскольку окаймленная матрица Гессе, умноженная на матрицу сравнительной статики, состоящую из частных производных, невырожденна, постольку основное матричное уравнение может быть разрешено относительно показателей сравнительной статики. В результате получим

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y^*}{\partial I} & \frac{\partial y^*}{\partial \mathbf{p}} & \left(\frac{\partial y^*}{\partial \mathbf{p}}\right)_{\text{comp}} \\ \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial I} & \frac{\partial x^*}{\partial \mathbf{p}} & \left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}}\right)_{\text{comp}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{p} \\ -p' & \mathbf{H} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{x}^{*\prime} & 0 \\ 0 & y^*\mathbf{I}_n & y^*\mathbf{I}_n \end{pmatrix}. \tag{7.4.16}$$

Но матрица, обратная окаймленной матрице Гессе, получается в результате обращения блочных матриц, так как $\mathbf{H}$ отрицательно определена и, следовательно, невырожденна

$$\begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{p} \\ -\mathbf{p}' & \mathbf{H} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mu & \mu\mathbf{p}\mathbf{H}^{-1} \\ \mu\mathbf{H}^{-1}p' & \mu\mathbf{H}^{-1}\mathbf{p}'\mathbf{p}\mathbf{H}^{-1}+\mathbf{H}^{-1} \end{pmatrix} \tag{7.4.17}$$

$$\mu = \frac{-1}{\mathbf{p}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{p}'} > 0.$$

Возвращаясь к выражению (7.4.16) и используя (7.4.17), можно получить

$$\mu = -\frac{\partial y^*}{\partial I} = -\frac{\partial}{\partial I}\left(\frac{\partial U^*}{\partial I}\right) = -\frac{\partial^2 U^*}{\partial I^2}, \tag{7.4.18}$$

поэтому скаляр μ можно интерпретировать как коэффициент убывания предельной полезности денег. В результате получаем характеристику влияния изменения параметров на изменение спроса

$$\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial I} = -\mu\mathbf{H}^{-1}\mathbf{p}' \tag{7.4.19}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}} = \mu\mathbf{H}^{-1}\mathbf{p}' \ \mathbf{x}^{*\prime} + \mu\mathbf{H}^{1}\mathbf{p}'\mathbf{p}\mathbf{H}^{1}y^* + \mathbf{H}^{-1}y^* \tag{7.4.20}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}}\right)_{\text{comp}} = \mu\mathbf{H}^{-1}\mathbf{p}'\mathbf{p}\mathbf{H}^{-1}y^* + \mathbf{H}^{-1}y^*. \tag{7.4.21}$$

Эти три уравнения показывают, как изменяется значение спроса на товары $\mathbf{x}^*$, по мере того как меняются параметры: отдельно — доход и цена, а также и цена в случае компенсирующего изменения дохода. Из этих уравнений следуют результаты применения метода сравнительной статики для теории потребления. В частности, их можно скомбинировать таким образом, что получается *уравнение Слуцкого*

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}}\right) = \left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}}\right)_{\text{comp}} - \left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial I}\right)\mathbf{x}^{*\prime} -, \tag{7.4.22}$$

основное уравнение теории ценности. Выписывая уравнение Слуцкого для каждого товара и цены, получим

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l} = \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}\right)_{\text{comp}} - \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial I}\right)x_l^*, \ j, l = 1, 2, \ldots, n \tag{7.4.23}$$

$$\text{Общий эффект} = \text{Влияние замены} + \text{Влияние дохода},$$

где, как показано, $\partial x_j^*/\partial p_l$ — *общий эффект* от влияния цены на спрос; $(\partial x_j^*/\partial p_l)_{\text{comp}}$ — *влияние замены* т. е. компенсированного изменения цены на спрос; и $(-\partial x_j^*/\partial I)x_l^*$ — *влияние изменения дохода* на спрос.

Из (7.4.21) следует, что матрица влияния замены симметрична и отрицательно полуопределена:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}}\right)_{\text{comp}} \text{ симметрична,} \tag{7.4.24}$$

$$\mathbf{z}\left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}}\right)_{\text{comp}}\mathbf{z}' \leqslant 0, \text{ и} = 0, \text{ если } \mathbf{z} = \alpha\mathbf{p}.$$

Из уравнения Слуцкого, учитывая симметричность, получаем *условие симметричности*

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l} + \frac{\partial x_j^*}{\partial I}x_l^* = \frac{\partial x_l^*}{\partial p_j} + \frac{\partial x_l^*}{\partial I}x_j^*, \ j, l = 1, 2, \ldots, n. \tag{7.4.25}$$

Из отрицательной полуопределенности следует, что все частные значения влияния замены отрицательны

$$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}\right)_{\text{comp}} < 0, \ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{7.4.26}$$

Это означает, что компенсированное возрастание цены товара всегда приводит к уменьшению спроса на этот товар. Уравнение Слуцкого требует, однако, чтобы

$$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}\right) = \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}\right)_{\text{comp}} - \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial I}\right)x_j^*, \tag{7.4.27}$$

поэтому (так как первое выражение в правой части — собственно влияние замены — отрицательно) выражение в левой части, характеризующее общий эффект, также отрицательно в том случае, если второе выражение в правой части достаточно малое и отрицательное:

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j} \leqslant 0, \quad \text{если} \quad \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial I}\right)x_j^* < \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}\right)_{\text{comp}} < 0. \tag{7.4.28}$$

Определим различные типы товаров следующим образом:

$$\begin{Bmatrix}\text{нормальные} \\ \text{товары} \\ \text{Гиффина}\end{Bmatrix}, \text{ если } \frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}\begin{Bmatrix}<\\>\end{Bmatrix}0,$$
$$\begin{Bmatrix}\text{ценные} \\ \text{малоценные}\end{Bmatrix}, \text{ если } \frac{\partial x_j^*}{\partial I}\begin{Bmatrix}>\\<\end{Bmatrix}0. \qquad (7.4.29)$$

Таким образом, из (7.4.28) видно, что товары Гиффина должны быть малоценными товарами. В общем случае каждый товар попадает в одну из трех категорий, приведенных в табл. на рис. 7-3. Примером нормального ценного товара служит масло: при повышении цены его покупается меньше, а при повышении дохода — больше. Нормальным малоценным товаром является маргарин: его покупают меньше, если увеличивается цена на него, но с ростом дохода его также покупают меньше, поскольку потребитель получает возможность покупать больше масла. В качестве примера товара Гиффина можно привести картофель в Ирландии в конце XIX века. В то время покупка картофеля представляла собой большую часть общих расходов населения, но по мере увеличения дохода потребитель предпочитал покупать меньше картофеля и больше мяса. В случае если возрастает цена картофеля, реальный доход понижается настолько, что потребители будут не в состоянии покупать столько мяса, сколько прежде, и поэтому будут вынуждены приобретать еще больше картофеля.

Некоторые результаты могут быть проиллюстрированы геометрически, как это сделано на рис. 7.4. Пусть начальное равновесие находится в точке A, в которой бюджетная линия касается кривой безразличия. При возрастании p_1 до p_1' точка пересечения бюджетной линии с осью x_1 изменится, как показано, и новое равновесие установится в точке C. Компенсированное изменение цены отражается пунктирной линией: отношение цен — новое (наклон пунктирной линии — p_1'/p_2), а доход изменился (возрос) так, что полезность осталась неизменной (A и B лежат на одной и той же кривой безразличия, а точка равновесия на пунктирной линии лежит в B) [1]. Заметим, что B находится слева от A; это подтверждает тот важный результат, что влияние одной замены отрицательно. Общее влияние изменения p_1 выражается отрезком $\overline{AC}$; влияние замены — отрезком $\overline{AB}$ и влияние дохода — отрезком $\overline{BC}$. В данном случае товар 1 является ценным, так как при понижении дохода сокращается и спрос (C лежит слева от B). Он также нормален; в этом можно убедиться, заметив, что при возрастании цены спрос понижается (C лежит слева от A).

[1] Если изменения в ценах различны, то компенсированное изменение цены не только не изменяет полезность, но и также дает возможность потребителю покупать старый набор товаров. См. [14].

Влияние изменения дохода / Влияние изменения частной цены	Ценные $\frac{\partial x_j^*}{\partial I}>0$	Малоценные $\frac{\partial x_j^*}{\partial I}<0$
Нормальные $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}<0$	Пример: масло	Пример: маргарин
Товары Гиффина $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}>0$		Пример: картофель в Ирландии в конце XIX века

Рис. 7.3.

Умножим соотношение (7.4.21) на $\mathbf{p}'$. Получим

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}}\right)_{\text{comp}}\mathbf{p}'=0, \qquad (7.4.30)$$

или в развернутом виде

$$\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}\right)_{\text{comp}} l=0, \quad j=1, 2, \ldots, n. \qquad (7.4.31)$$

Так как все цены положительны, то, для того чтобы это условие выполнялось, необходимо, чтобы хотя бы один элемент каждой строки матрицы влияния замены имел отличный от остальных знак. Но элемент на главной диагонали характеризует собой частное влияние замены, кото-

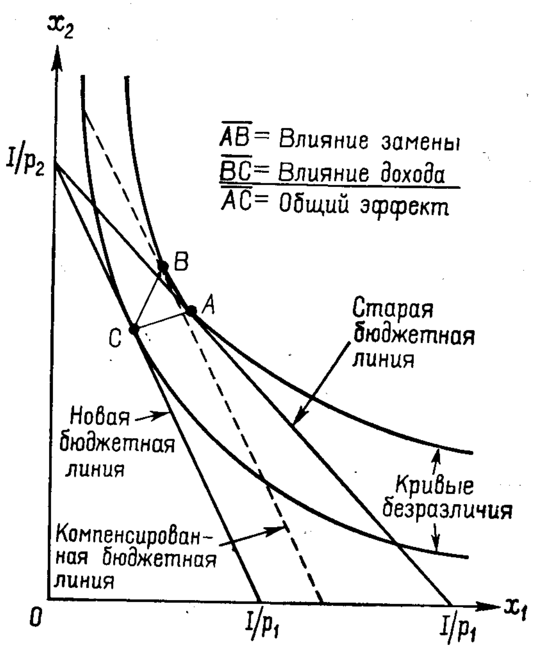

Рис. 7.4. Сравнительная статика в случае двух товаров.

рое должно быть отрицательным. Следовательно, по крайней мере один элемент каждой строки положителен.

Для всех j существует $l \neq j$ такое, что

$$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}\right)_{\text{comp}} > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{7.4.32}$$

Два товара j и l являются

$$\left\{\begin{matrix}\text{взаимозаменяемыми}\\ \text{взаимодополняемыми}\end{matrix}\right\}, \text{ если } \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}\right)_{\text{comp}} \left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\} 0. \tag{7.4.33}$$

Таким образом, два товара являются взаимозаменяемыми (взаимодополняемыми), если компенсированное возрастание цены одного приводит к увеличению (снижению) спроса на другой. Согласно (7.4.32), каждому товару соответствует по крайней мере один такой товар, который составляет с ним взаимозаменяемую пару. В частности, если мы рассматриваем случай только двух товаров, они обязательно должны быть взаимозаменяемыми, как это показано на рис. 7.4, где B лежит выше, чем A.

Из уравнения Слуцкого (7.4.22) и соотношения (7.4.30) получаем

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}}\right) \mathbf{p}' + \left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial I}\right) I = 0, \tag{7.4.34}$$

или в развернутой форме

$$\sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}\right) p_l + \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial I}\right) I = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{7.4.35}$$

Эту зависимость можно вывести также из однородности нулевой степени функций спроса, используя теорему Эйлера об однородных функциях. Запишем соотношение (7.4.35) в несколько другом виде

$$\sum_{l=1}^{n} \left(\frac{p_l\, \partial x_j^*}{x_j^*\, \partial p_l}\right) + \left(\frac{I\, \partial x_j^*}{x_j^*\, \partial I}\right) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{7.4.36}$$

где

$$\left\{\begin{matrix}\dfrac{p_l}{x_j^*} & \dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_l}\\ \dfrac{I}{x_j^*} & \dfrac{\partial x_j^*}{\partial I}\end{matrix}\right\} = \begin{matrix}\textit{эластичность}\\ \textit{спроса на товар } j\\ \textit{по отношению к}\end{matrix} \left\{\begin{matrix}p_l\\ I\end{matrix}\right\}. \tag{7.4.37}$$

Таким образом, из (7.4.36) следует, что для всякого товара сумма всех $(n+1)$ эластичностей должна быть равна нулю, т. е. сумма всех эластичностей по цене равна отрицательной эластичности по доходу.

Умножая (7.4.19) и (7.4.21) на $\mathbf{p}$, получим

$$\begin{gathered}\mathbf{p}\left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial I}\right) = 1\\ \mathbf{p}\left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}}\right)_{\text{comp}} = 0,\end{gathered} \tag{7.4.38}$$

где первое соотношение называется *условием агрегации Энгеля*. В развернутом виде

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j^*}{\partial I} = 1\\ \sum_{j=1}^{n} p_j \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}\right)_{\text{comp}} = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, n.\end{gathered} \tag{7.4.39}$$

Из того факта, что неотрицательная взвешенная сумма изменений значений спроса по отношению к доходу должна равняться единице, следует, что все товары одновременно не могут быть малоценными:

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial I} > 0 \text{ для некоторого } j, \ j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (7.4.40)$$

Объединяя соотношения (7.4.38) с уравнением Слуцкого, можно получить условие *агрегации Курно*

$$\mathbf{p}\,\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{x}^{*\prime} = 0, \qquad (7.4.41)$$

или в развернутом виде,

$$x_l^* = -\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}, \quad l = 1, 2, \ldots, n. \qquad (7.4.42)$$

Таким образом, значение спроса на товар l равно отрицательной взвешенной сумме изменений значений спроса по отношению к цене товара l, в которой в качестве весов выступают цены товаров.

7.5. ВЫЯВЛЕННОЕ ПРЕДПОЧТЕНИЕ

Одним из подходов к теории потребления является выявленное предпочтение. Этот подход базируется на наблюдении рыночного выбора, в частности на наблюдении сумм цен [3, 15, 16, 17, 6]. Основное понятие метода выявленного предпочтения — это отношение «явного предпочтения» между парами наборов. Если потребитель покупает набор товаров $\mathbf{x}^1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)'$ по ценам $\mathbf{p}^1 = (p_1^1, p_2^1, \ldots, p_n^1)$, в то время как он мог бы купить при этих ценах другой набор товаров $\mathbf{x}^2$, то считается, что $\mathbf{x}^1$ явно предпочтительнее $\mathbf{x}^2$; это записывается в следующем виде: $\mathbf{x}^1 \circledS \mathbf{x}^2$. Таким образом,

$$\mathbf{x}^1 \circledS \mathbf{x}^2, \text{ если и только если } \mathbf{p}^1\mathbf{x}^1 \geqslant \mathbf{p}^1\mathbf{x}^2, \qquad (7.5.1)$$

где условие

$$\mathbf{p}^1\mathbf{x}^1 = \sum_{j=1}^{n} p_j^1 x_j^1 \geqslant \sum_{j=1}^{n} p_j^1 x_j^2 = \mathbf{p}^1\mathbf{x}^2 \qquad (7.5.2)$$

означает, что расходы на первый набор, который действительно был куплен при определенных ценах, не меньше,

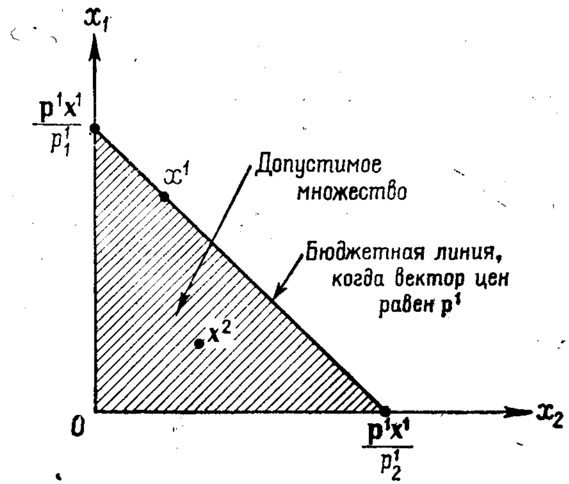

Рис. 7.5. Набор товаров $\mathbf{x}^1$ явно предпочтительнее набора товаров $\mathbf{x}^2$.

чем расходы, которые потребовались бы на покупку второго набора при этих же ценах. Это отношение иллюстрируется на рис. 7.5: набор $\mathbf{x}^2$ находится внутри множества, ограниченного бюджетной линией, вдоль которой потребитель покупает $\mathbf{x}^1$, поэтому $\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^2$. Аналогично $\mathbf{x}^1$ явно предпочтительнее всех точек, которые лежат в заштрихованной области ниже бюджетной линии.

Слабая аксиома выявленного предпочтения утверждает, что если набор $\mathbf{x}^1$ явно предпочтительнее набора $\mathbf{x}^2$, то набор $\mathbf{x}^2$ *не может* быть явно предпочтительнее набора $\mathbf{x}^1$, т. е. отношение «явного предпочтения является асимметричным

$$\mathbf{x}^1 \circledS \mathbf{x}^2 \text{ не означает } \mathbf{x}^2 \circledS \mathbf{x}^1$$
$$(\text{т. е. } \mathbf{x}^2 \circledS \mathbf{x}^1 \text{ несправедливо}). \qquad (7.5.3)$$

Используя определение отношения (7.5.1), слабая аксиома формулируется так

$$\mathbf{p}^1\mathbf{x}^1 \geqslant \mathbf{p}^1\mathbf{x}^2 \text{ влечет } \mathbf{p}^2\mathbf{x}^2 < \mathbf{p}^2\mathbf{x}^1. \qquad (7.5.4)$$

Таким образом, слабая аксиома означает, что если при ценах $\mathbf{p}^1$ потребитель мог купить $\mathbf{x}^2$, но выбрал $\mathbf{x}^1$, то в случае, когда при ценах $\mathbf{p}^2$ выбран $\mathbf{x}^2$, набор $\mathbf{x}^1$ не может быть куплен потребителем. Почти все результаты применения теории спроса, полученные до сих пор, могут быть выведены из слабой аксиомы выявленного предпочтения. Например, рассмотрим отрицательность собственно эффекта замещения (7.4.25). Если два набора товаров $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ лежат в одном множестве безразличия, тогда ни один из них явно не предпочитается другому

$$\mathbf{p}^1\mathbf{x}^1 < \mathbf{p}^1\mathbf{x}^2$$
$$\mathbf{p}^2\mathbf{x}^2 < \mathbf{p}^2\mathbf{x}^1. \qquad (7.5.5)$$

Положим $\mathbf{p}^2 = (\mathbf{p}^1 + \Delta\mathbf{p})$ и $\mathbf{x}^2 = (\mathbf{x}^1 + \Delta\mathbf{x})$, тогда из этих неравенств следует

$$\mathbf{p}^1\,\Delta\mathbf{x} > 0 \qquad (7.5.6)$$
$$(\mathbf{p}^1 + \Delta\mathbf{p})\,\Delta\mathbf{x} < 0,$$

поэтому

$$\Delta\mathbf{p}\,\Delta\mathbf{x} < 0, \qquad (7.5.7)$$

что и означает **отрицательность всех собственно эффектов** замещения.

Несмотря на то что из слабой аксиомы выявленного предпочтения могут быть получены почти все результаты теории спроса, она не влечет *условия интегрируемости*, которое заключается в том, что матрица эффектов замещения должна быть симметричной. Эти условия, необходимые для того, чтобы построить функцию полезности [18, 19, 4], дает *сильная аксиома выявленного предпочтения*, которая утверждает, что если набор $\mathbf{x}^1$ явно предпочтительнее набора $\mathbf{x}^2$, набор $\mathbf{x}^2$ явно предпочтительнее $\mathbf{x}^3, \ldots, \mathbf{x}^{n-1}$ явно предпочтительнее набора $\mathbf{x}^n$, то набор $\mathbf{x}^n$ не может быть явно предпочтительнее, чем $\mathbf{x}^1$, т. е. для всех n

$$\mathbf{x}^1 \textcircled{>} \mathbf{x}^2,\ \mathbf{x}^2 \textcircled{>} \mathbf{x}^3, \ldots, \mathbf{x}^{n-1} \textcircled{>} \mathbf{x}^n$$
$$\text{не влечет}\ \ \mathbf{x}^n \textcircled{>} \mathbf{x}^1. \qquad (7.5.8)$$

Сильная аксиома включает слабую (что соответствует случаю $n = 2$), и при определенных качественных условиях регулярности эти две аксиомы являются эквивалентными. Сильная аксиома при определенных условиях непрерывности характеризует некоторое последовательное множество предпочтений, таких, что удовлетворяются условия интегрируемости, необходимые для построения функции полезности.

7.6. ПОЛЕЗНОСТЬ ФОН НЕЙМАНА — МОРГЕНШТЕРНА

Подход фон Неймана — Моргенштерна основывается на совместном использовании теории полезности и теории вероятности. Он базируется на некоторых аксиомах о вероятностной смеси наборов товаров. Результатом этого подхода является функция полезности, обладающая некоторыми измерительными свойствами, которые могут быть использованы в процессе решений в условиях риска. Эти функции называются *функциями полезности фон Неймана — Моргенштерна* [28, 20, 21, 22, 23, 5].

Основным понятием полезности фон Неймана — Моргенштерна является *лотерея*, которая определяется как множество наборов, каждый из которых может быть получен с заданной вероятностью. Лотерея описывается вектором-строкой

$$\mathbf{L} = (p_1,\ \mathbf{x}^1;\ p_2,\ \mathbf{x}^2;\ \ldots;\ p_s,\ \mathbf{x}^s), \qquad (7.6.1)$$

которая означает, что набор $\mathbf{x}^1$ может быть получен с некоторой вероятностью p_1; набор $\mathbf{x}^2$ — с некоторой вероятностью $p_2, \ldots$; и x^s — с вероятностью p_s, где

$$p_r \geqslant 0,\ r = 1,\ 2,\ \ldots,\ s;\ \sum_{r=1}^{s} p_r = 1. \qquad (7.6.2)$$

Например, $(1, \mathbf{x}^1)$ означает то же самое, что $\mathbf{x}^1$, — лотерея, в которой набор $\mathbf{x}^1$ выигрывает наверняка, а $(p, \mathbf{x}^1; (1 - p), \mathbf{x}^2)$ — лотерея, в которой $\mathbf{x}^1$ выигрывает с вероятностью p, а $\mathbf{x}^2$ — с вероятностью $(1 - p)$.

Первая аксиома полезности фон Неймана — Моргенштерна аналогична аксиоме из раздела 7.2. о предположении существования отношения предпочтения $\succcurlyeq$, которое является *совершенной полуупорядоченностью* всех лотерей, будучи совершенным, транзитивным и рефлексивным. Безразличие и строгое предпочтение определяется здесь так же, как и в разделе 7.2.

Вторая аксиома — аксиома *монотонности*: пусть даны два набора $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$, для которых $\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^2$; тогда

$$(p',\ \mathbf{x}^1;\ (1 - p'),\ \mathbf{x}^2) \succ (p,\ \mathbf{x}^1;\ (1 - p),\ \mathbf{x}^2), \qquad (7.6.3)$$

если и только если $p' > p$, т. е. потребитель отдает предпочтение лотерее с большей вероятностью получить предпочитаемый набор. В частности,

$$\mathbf{x}^1 \succ (p,\ \mathbf{x}^1,\ (1-p),\ \mathbf{x}^2)$$

$$\text{для всех } p;\ 0 < p < 1; \qquad (7.6.4)$$

т. е. набор, который получается наверняка, предпочтительнее любой лотереи, содержащей его и менее предпочтительный набор.

Третья аксиома, аксиома *непрерывности*, утверждает, что, если даны три набора $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3$, для которых $\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^2 \succ \mathbf{x}^3$, тогда существует вероятность p, для которой

$$(p,\ \mathbf{x}^1;\ (1-p),\ \mathbf{x}^3) \sim \mathbf{x}^2, \qquad (7.6.5)$$

где $0 < p < 1$. Это предположение означает, что выбранные соответствующим образом лотереи интерполируют между предпочтениями в том смысле, что потребитель не делает различий между лотереей, содержащей более предпочтительный и менее предпочтительный наборы, и определенностью получения некоторого набора, занимающего промежуточное положение.

Четвертая аксиома, аксиома о *независимости не связанных между собой альтернатив*, утверждает следующее: заданы два набора $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2$, для которых $\mathbf{x}^1 \sim \mathbf{x}^2$; тогда для любого третьего набора $\mathbf{x}^3$

$$(p,\ \mathbf{x}^1;\ (1-p),\ \mathbf{x}^3) \sim (p,\ \mathbf{x}^2;\ (1-p),\ \mathbf{x}^3),$$

$$\text{для всех } p,\ 0 < p < 1. \qquad (7.6.6)$$

Таким образом, присутствие третьего набора не нарушает предпочтений.

Последней аксиомой является аксиома о *приведении сложных лотерей*. Пусть даны m лотерей

$$\mathbf{L}_i = (p_1^i,\ \mathbf{x}^1;\ p_2^i,\ \mathbf{x}^2;\ \ldots;\ p_s^i \mathbf{x}^s),\ i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (7.6.7)$$

Рассмотрим сложную лотерею

$$\mathbf{L} = (q_1,\ \mathbf{L}_1;\ q_2,\ \mathbf{L}_2;\ \ldots;\ q_m \mathbf{L}_m), \qquad (7.6.8)$$

под которой имеется в виду лотерея, в которой в качестве исходов также выступают лотереи, а q_i — вероятность получить лотерею $\mathbf{L}_i$. Согласно этой аксиоме, сложная

лотерея может быть приведена к лотерее с подходящими вероятностями

$$\begin{gathered}\mathbf{L} \sim \mathbf{L}' = (r_1,\ \mathbf{x}^1;\ r_2,\ \mathbf{x}^2;\ \ldots;\ r_s,\ \mathbf{x}^s)\\ r_1 = q_1 p_1^1 + q_2 p_1^2 + \ldots + q_m p_1^m\\ r_2 = q_1 p_2^1 + q_2 p_2^2 + \ldots + q_m p_2^m\\ \vdots\\ r_s = q_1 p_s^1 + q_2 p_s^2 + \ldots + q_m p_s^m.\end{gathered} \qquad (7.6.9)$$

Основная теорема теории полезности фон Неймана — Моргенштерна утверждает, что при соблюдении этих аксиом существует функция полезности, определенная на всех лотереях, которая является однозначной с точностью до монотонного строго возрастающего линейного преобразования. Так как одним из особых видов лотереи является набор, где $(1, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$, функция полезности определена для всех наборов, причем

$$U(\mathbf{x}) > U(\mathbf{y}), \text{ если и только если } \mathbf{x} \succ \mathbf{y}. \qquad (7.6.10)$$

В общем виде

$$U(p_1\, \mathbf{x}^1;\ p_2\, \mathbf{x}^2;\ \ldots;\ p_s,\ \mathbf{x}^s) = \sum_{r=1}^{s} p_r U(\mathbf{x}^r), \qquad (7.6.11)$$

т. е. полезность лотереи есть математическое ожидание полезности, равное взвешенной сумме полезностей наборов компонент, где в качестве весов выступают вероятности.

Функция полезности фон Неймана — Моргенштерна является однозначной с точностью до монотонного строго возрастающего *линейного* преобразования в противоположность обыкновенным функциям полезности, описанным в разделе 7.2, которые являются однозначными с точностью до монотонного строго возрастающего (линейного или нелинейного) преобразования [1]. Таким образом, если $U(\mathbf{x})$ — функция полезности, то $aU(\mathbf{x}) + b$, где $a > 0$, тоже является функцией полезности. Ее можно построить, произвольным образом выбрав числовые значения для двух уровней полезности; полезности других наборов оцениваются соответствующим взвешиванием вероятностями.

[1] Другой подход, который также строит функцию полезности с точностью до монотонного строго возрастающего линейного преобразования, но не использует вероятностных понятий, основан на аксиоматике разностей полезностей. См. [24].

Например, предположим $x^1 \succ x^2$ и взяты произвольные числа $U(x^1)$ и $U(x^2)$, для которых $U(x^1) > U(x^2)$; они представляют собой уровни полезности x^1 и x^2 соответственно. Для того чтобы определить полезность любого другого набора, взвесим эти значения вероятностями. Например, если x^3 — набор, для которого $x^1 \succ x^3 \succ x^2$, то по аксиоме непрерывности существует вероятность p, такая, что

$$(p,\ x^1;\ (1-p),\ x^2) \sim x^3, \tag{7.6.12}$$

поэтому

$$U(x^3) = U(p,\ x^1;\ (1-p),\ x^2) = \\ = pU(x^1) + (1-p)\,U(x^2), \tag{7.6.13}$$

где первое равенство следует из того, что безразличные лотереи доставляют одинаковые значения полезности, а второе равенство получено из того факта, что полезность лотереи есть математическое ожидание ее полезности. Если шкала установлена так, что $U(x^1) = 50$, $U(x^2) = 10$ и $p = 0{,}2$, то $U(x^3) = 0{,}2\,(50) + 0{,}8\,(10)$ или 18. Аналогично, если $x^4 \succ x^1$, то по той же аксиоме непрерывности существует вероятность p, такая, что

$$x^1 \sim (p,\ x^4;\ (1-p),\ x^2), \tag{7.6.14}$$

поэтому

$$U(x^1) = pU(x^4) + (1-p)\,U(x^2), \tag{7.6.15}$$

или

$$U(x^4) = \frac{1}{p}\,U(x^1) - \left(\frac{1-p}{p}\right) U(x^2). \tag{7.6.16}$$

Таким образом, как только выбраны два произвольных числа, полезность шкалы фон Неймана — Моргенштерна определена. Поэтому она в некотором смысле аналогична температурной шкале: если выбраны два значения, все остальные определяются однозначно.

Следствием теоремы о математическом ожидании полезности является правило рационального поведения в процессе принятия решения в условиях риска. Предположим, что человек, принимающий решение, должен выбрать одну из m стратегий: $S_1, S_2, \ldots, S_m$, где исходом стратегии S_i является лотерея L_i

$$L_i = (p_1^i,\ x_i^1;\ p_2^i,\ x_i^2,\ \ldots,\ p_s^i,\ x_i^s),\quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{7.6.17}$$

В этой записи p_r^i характеризует вероятность выигрыша набора x_i^r при заданной стратегии S_i. Поскольку полезность лотереи L_i оценивается как

$$U(L_i) = \sum_{r=1}^{s} p_r^i U(x_i^r), \tag{7.6.18}$$

то человек, принимающий решение, чтобы максимизировать полезность, выберет стратегию, которая обеспечивает наибольшее значение ожидаемой полезности

$$\max_{S_i} U(L_i) = \max_{S_i} \sum_{r=1}^{s} p_r^i U(x_i^r). \tag{7.6.19}$$

Например, если имеется три возможные стратегии, для каждой из которых заданы вероятности выигрыша одной из двух альтернатив ($m = 3$, $S = 2$), то оптимальной стратегии соответствует наибольший элемент главной диагонали следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} U(x_1^1) & U(x_1^2) \\ U(x_2^1) & U(x_2^2) \\ U(x_3^1) & U(x_3^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^1 & p_1^2 & p_1^3 \\ p_2^1 & p_2^2 & p_2^3 \end{pmatrix}, \tag{7.6.20}$$

где в качестве матрицы полезностей выступает платежная матрица, как в гл. 6, а вторая матрица состоит из вероятностей.

ЗАДАЧИ

7-А. Доказать, что для отношений безразличия $\sim$ и строгого предпочтения $\succ$, определенных соотношениями (7.2.2) и (7.2.3), справедливы следующие утверждения:

1. Отношение безразличия является транзитивным, рефлексивным и асимметричным.
2. Отношение строгого предпочтения является транзитивным и симметричным.
3. Для двух заданных наборов x и y из C выполняется $x \succ y$, $y \succ x$, или $x \sim y$.
4. Если функция полезности существует, то $U(x) = U(y)$, если, и только если, $x \sim y$, в то время как $U(x) > U(y)$, если, и только если, $x \succ y$.

7-Б. Доказать, что если I_x является множеством безразличия, определенным в (7.2.10), то:

1. Если $\mathbf{y} \in I_{\mathbf{x}}$, то $I_x = I_y$ и $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$

2. Если $\mathbf{y} \notin I_{\mathbf{x}}$, то $I_x \cap I_y = \phi$ и выполняется одно из двух: либо $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, либо $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$.

7-В. Рассмотрим лексикографические предпочтения, определенные в примечании на стр. 202.

1. Что является для них множеством безразличия?

2. Показать, что для них не справедлива аксиома непрерывности.

7-Г. Показать, что аксиома непрерывности (7.2.11) и (7.2.12) эквивалентна допущению, что если $\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^2 \succ \mathbf{x}^3$, то любая непрерывная кривая, содержащая $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^3$, проходит через набор $\mathbf{x}^4$, такой, что $\mathbf{x}^4 \sim \mathbf{x}^2$.

7-Д. Аксиома выпуклости (7.2.18) и закон Госсена (7.2.21) являются зависимыми, но не эквивалентными. Показать их зависимость в случае двух товаров.

7-Е. Показать, что необходимые условия (7.3.11) инвариантны по отношению к монотонному строго возрастающему преобразованию полезности.

7-Ж. Для каждой функции полезности из табл. 7-1 вывести функцию спроса в случае двух товаров ($n = 2$).

7-З. Предположим, что существует только два товара, которые потребляются всегда в установленных пропорциях.

1. Показать кривые безразличия и равновесие геометрически.

2. Каковы необходимые алгебраические условия для равновесия?

7-И. Функция полезности является *аддитивной*, если [1]

$$U(x_1 x_2, \ldots, x_n) = U_1(x_1) + U_2(x_2) + \ldots + U_n(x_n).$$

1. Доказать, что в случае двух товаров с предельной нормой замещения

$$R(x_1, x_2) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^{-1},$$

функция полезности аддитивна, если и только если

$$R\frac{\partial^2 R}{\partial x_1\, \partial x_2} = \frac{\partial R}{\partial x_1}\,\frac{\partial R}{\partial x_2}.$$

[1] См. [25]. «Почти аддитивные предпочтения», для которых матрица Гессе функции полезности является «почти диагональной», т. е. когда недиагональные элементы очень малы по сравнению с диагональными, рассматриваются в работе Бартена [13].

2. Какие ограничения на слабое отношение предпочтения $\succcurlyeq$ гарантируют аддитивность функции полезности?

3. Показать, что если функция полезности аддитивна, то спрос на каждый товар зависит только от цены этого товара, цены любого другого товара и общего расхода на эти два товара.

4. Показать, что в случае, если функция полезности аддитивна, в экономике не будет малоценных и взаимодополняемых товаров.

5. Показать, что аддитивная функция полезности предполагает только монотонное строго возрастающее *линейное* преобразование полезности.

6. Как изменятся результаты, если $U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = U(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}) + U(x_{n_1+1}, x_{n_2+2}, \ldots, x_n)$?

7-К. Определим функции спроса Торнквиста [4]

$$x = \frac{\alpha I}{I+\beta}, \quad x = \alpha\,\frac{I-\gamma}{I+\beta}, \quad x = \alpha I\left(\frac{I-\gamma}{I+\beta}\right)$$

для «предметов первой необходимости», «предметов относительной роскоши» и «предметов роскоши» соответственно, где параметры α, β и γ зависят от цен.

1. Найти асимптоты этих функций.

2. Найти эластичности по доходу этих функций.

3. В случае двух товаров спрос на первый выражается функцией Торнквиста для «предметов первой необходимости» при $\alpha = a$, $\beta = bp_1$ и $p_2 = 1$ (второй товар является единицей счета). Проверить, что соответствующая функция полезности имеет вид

$$U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{b-a}(x_1 + b - a)^{-b}.$$

7-Л. Доказать, что если в пределах определенной группы товаров цены изменяются пропорционально, то такую группу можно рассматривать как один товар, который называется *сложным* [1]. (Достаточно рассмотреть три товара, причем цены двух из них всегда изменяются в одинаковой пропорции.

7-М. Доказать, что эластичности по относительным ценам и доходу равны соответствующим эластичностям по денежным ценам и доходу.

7-Н. *Товар Гиффина* определяется тем, что предъявляемый спрос на него возрастает по мере повышения его цены.

1. Показать геометрически влияние дохода и влияние замены для товара Гиффина.

2. Проверить, что товар является товаром Гиффина, если он малоценен и доля дохода, истраченная на этот товар, превышает отношение эластичности отрицательной компенсированной цены к эластичности по доходу этого товара.

3. Могут ли существовать товары Гиффина, если выполняется слабая аксиома выявленного предпочтения?

7-О. В (7.4.33) было дано определение взаимозаменяемых и взаимодополняемых товаров по знаку влияния компенсированной цены. Сопоставьте этот критерий с критерием полезности — товары j и l являются

$$\left\{\begin{matrix}\text{взаимозаменяемыми}\\ \text{взаимодополняемыми}\end{matrix}\right\},\quad \text{если}\quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_j\,\partial x_l}\left\{\begin{matrix}<\\ >\end{matrix}\right\}0,$$

и с критерием влияния некомпенсированной цены — товары j и l являются

$$\left\{\begin{matrix}\text{взаимозаменяемыми}\\ \text{взаимодополняемыми}\end{matrix}\right\},\quad \text{если}\quad \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}\right)\left\{\begin{matrix}>\\ <\end{matrix}\right\}0.$$

Какие точки зрения выражаются в этих различных критериях? Когда они приводят к противоположным результатам? Являются ли они инвариантными относительно монотонного строго возрастающего преобразования полезности?

7-П. Показать, что если предельная полезность дохода y^* выражается как функция параметров $y^* = y^*(\mathbf{p}, I)$, то она однородна степени — 1. Вывести показатели сравнительной статики для y^* и сопоставить их с соответствующими показателями для $\mathbf{x}^*$, используя (7.4.16) и (7.4.17).

7-Р. Так как функция полезности определена в пространстве всех наборов товаров, а функции спроса выражают оптимальный набор как функцию цен и дохода, то оптимальный уровень полезности косвенно зависит от цен и дохода

$$U^* = U(\mathbf{x}^*) = U^*(\mathbf{p}, I),$$

где $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I)$

и где $U^*(\mathbf{p}, I)$ называется *косвенной функцией полезности* [4, 2].

1. Показать, что косвенная функция полезности — убывающая функция всех цен и возрастающая функция дохода.

2. Показать, что

$$x_j^* = -\frac{\partial U^*/\partial p_j}{\partial U^*/\partial I},\quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

3. Принцип взимания налогов (равенство «жертв») требует, чтобы

$U^*(\mathbf{p}, I) - U^*(\mathbf{p}, I - T(I)) = \text{const}$ для всех I,

где $T(I)$ — часть дохода, взимаемого в качестве налога на доход I. Показать, что, согласно этому принципу, размеры налога будут возрастать с повышением дохода. Найти зависимость налогов от дохода для частных функций полезности из табл. 7-1.

7-С. Проблема выбора между заработком и досугом может быть рассмотрена с точки зрения теории потребления. Тогда задачу можно сформулировать в следующем виде:

$$\max_{\mathbf{x},\, l} U(\mathbf{x}, l)\quad \text{при условии}\quad \mathbf{p}\mathbf{x} = I + wh$$
$$l + h = q,$$

где $\mathbf{x}$ обозначает набор товаров; l — досуг ($dU/dl > 0$); h — рабочее время; w — уровень заработной платы; I — нетрудовой доход и q — общее наличное время; параметрами задачи являются $\mathbf{p}$, I, w и q.

1. Найти функции спроса для товаров и для досуга. Может ли быть досуг малоценным? Типа товаров Гиффина?

2. Вывести показатели сравнительной статики.

3. Построить геометрически кривую предложения труда, предположив, что в наличии имеется только один товар.

7-Т. Для того чтобы ввести в теорию потребления понятие денежного капитала, необходимо предположить, что функция полезности зависит не только от набора товаров, но также и от ценности денежного капитала и всех цен, так как характер спроса на деньги зависит от цен

$$U = U(\mathbf{x}, p_0 M, \mathbf{p}),$$

где p_0 обозначает цену денег, а M — денежный капитал и функция полезности предполагается однородной нулевой степени относительно всех $n+1$ цен. Запишем бюджетное ограничение

$$\mathbf{px} = I + r(W - p_0M),$$

где r — норма процента на неденежные активы, а W — богатство [3, 26].

1. Найти условия равновесия.

2. Найти функции спроса для товаров и денег и получить показатели сравнительной статики.

7-У. В задаче потребления с *направленным нормированием* в дополнение к денежным ценам и доходу в бюджетном ограничении

$$\mathbf{px} \leqslant I$$

потребитель встречает еще одно

$$\bar{\mathbf{p}}\mathbf{x} \leqslant \bar{I},$$

где $\bar{\mathbf{p}} = (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n)$ — вектор указанных цен, а $\bar{I}$ — указанный доход, назначенный потребителю [3, 27].

1. Проиллюстрировать задачу и ее решение геометрически в случае двух товаров.

2. Найти условия равновесия, функции спроса и показатели сравнительной статики.

3. Как повлияет направленное нормирование только одного товара на эластичность спроса ненормированных товаров?

7-Ф. В экономике с H потребителями рыночный спрос на товар получается путем обобщения индивидуальных функций спроса. Таким образом, если спрос на товар j, предъявляемый потребителем h, который имеет доход I^h, записывается как

$$x_j^h = x_j^h(\mathbf{p}, I^h), \quad h = 1, 2, \ldots, H,$$

то *рыночный спрос* на товар j имеет вид

$$X_j = \sum_{h=1}^{H} x_j^h(\mathbf{p}, I^h) = X_j(\mathbf{p}, I),$$

где I является общим доходом

$$I = \sum_{h=1}^{H} I^h.$$

1. Показать, что общие расходы равны общим доходам

$$\sum_{j=1}^{n} p_j X_j = I.$$

2. Показать, что функции рыночного спроса однородны нулевой степени

$$X_j(ap_1, ap_2, \ldots, ap_n) = X_j(p_1, p_2, \ldots, p_n, I),$$
$$a = \alpha > 0.$$

3. Обратные функции спроса выражают рыночные продажные цены как функции от рыночного спроса и дохода

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{p}^*(\mathbf{X}, I), \quad \text{т. е.} \quad p_j^* = p_j^*(X_1, X_2, \ldots, X_n, I),$$
$$j = 1, 2, \ldots, n,$$

где $X_j(\mathbf{p}^*(\mathbf{X}, I), I) \equiv X_j, \; j = 1, 2, \ldots, n,$

$$I = \mathbf{p}^*\mathbf{X}.$$

Показать, что обратные функции спроса однородны первой степени относительно дохода, и определить $\partial\mathbf{p}^*/\partial\mathbf{X}$ и $\partial\mathbf{p}^*/\partial I$.

7-Х. Используя аксиомы выявленного предпочтения, доказать:

1. Существование функций спроса (т. е., что на самом деле любой набор цен и дохода приводит к выбору единственного набора товаров).

2. Однородность нулевой степени функций спроса.

7-Ц. Показать, что для заданной шкалы полезности фон Неймана — Моргенштерна:

1. Монотонное строго возрастающее линейное преобразование полезности дает новую шкалу полезности, которая удовлетворяет аксиомам фон Неймана — Моргенштерна и выводам из них; монотонное строго возрастающее нелинейное преобразование полезности несовместимо с этими аксиомами и результатами.

2. Разности и отношения полезностей зависят от используемой шкалы, но относительные величины разностей полезностей (т. е. их отношения) всегда одинаковы для различных шкал.

7-4. Большинство людей, если есть выбор между A и B, где

$$A = 1 \text{ млн. долл. наверняка}$$

$$B = \begin{Bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ млн. долл. с вероятностью } \begin{Bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}89 \\ 0{,}01 \end{Bmatrix},$$

выберут A. Большинство людей также, если есть выбор между C и D, где

$$C = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ млн. долл. с вероятностью } \begin{Bmatrix} 0{,}11 \\ 0{,}89 \end{Bmatrix}$$

$$D = \begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ млн. долл. с вероятностью } \begin{Bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}9 \end{Bmatrix},$$

выберут D. Показать, что, согласно выводам фон Неймана — Моргенштерна, это поведение непоследовательно.