Глава 6
Теория игр

В предшествующих главах мы изучали такие задачи принятия решений, когда выбор решения осуществляется одним лицом. В задаче рационального ведения хозяйства решение выбирается при предположении о том, что известны целевая функция, инструментальные переменные и ограничения. В данной главе рассматриваются задачи принятия решений с несколькими участниками. В задачах такого типа оптимальное значение целевой функции для каждого из участников зависит и от решений, принимаемых всеми остальными участниками. Предметом теории игр являются такие ситуации, в которых важную роль играют конфликты и совместные действия [1].

Математическая дисциплина, исследующая ситуации, в которых принятие решения зависит от нескольких участников, называется «теорией игр», потому что вполне аналогичные с математической точки зрения положения возникают в общеизвестных «салонных» играх (например, в таких, как покер, бридж, шахматы, игра в крестики и нолики и другие). Область приложения теории игр выходит, конечно, далеко за рамки таких игр и включает, например, математику, экономику, политику, военную стратегию. Однако в терминологии теории игр много заимствований из терминологии общеизвестных игр.

Так, лица, принимающие решения, называются *игроками*, а целевая функция — *платежной функцией*. Под игроками могут подразумеваться отдельные лица или группы лиц (как, например, партнеры по игре в бридж), фирмы, страны и т. д. *Выигрыш* каждого игрока определяется платежной функцией. Таким образом, *игра* пред-

[1] Основная литература по теории игр: [1, 2, 3].

ставляет собой совокупность известных всем игрокам правил, которые определяют, что может делать игрок и каковы последствия и выигрыши в результате каждого отдельного их действия.

Ход — это момент игры, когда игроки должны произвести выбор одного из возможных вариантов. *Партией* игры называется некоторая определенная совокупность ходов и выборов. Существенной чертой любой игры является то, что выигрыш каждого игрока зависит обычно не только от сделанного им самим выбора, но и от выбора других игроков [1].

Каждый игрок должен учитывать эту зависимость от остальных игроков при выборе стратегии. *Стратегия* — это набор правил, формулируемых до игры, которые определяют выбор варианта в любой из могущих возникнуть ситуаций. Так как понятие стратегии является в теории игр центральным, то эту дисциплину нередко называют «стратегическими играми».

6.1. КЛАССИФИКАЦИЯ И ОПИСАНИЕ ИГР

Различные виды игр можно классифицировать, основывываясь на том или ином принципе: по числу игроков или по числу стратегий, по свойствам платежной функции или по характеру предварительных переговоров между игроками до игры.

В зависимости от *числа игроков* различают игры с двумя, тремя и более участниками. Весь материал, изложенный в предшествующих главах, можно рассматривать как теорию игр с одним игроком. При наличии двух игроков могут возникать и конфликтные ситуации, и необходимость в координированных действиях (кооперация). Когда число игроков не меньше трех, могут создаваться коалиции — группы из двух или более игроков, имеющих общую цель и координирующих свои стратегии.

Согласно другому принципу классификации — *по количеству стратегий* — различают конечные и бесконечные

[1] Выигрыши измеряются полезностью в том смысле, как это изложено в гл. 7. Если выигрыши зависят от исходов случайных событий с известными вероятностями (от «случайных ходов»), то они являются математическими ожиданиями полезностей, т. е. взвешенными суммами полезностей, где весами являются вероятности.

игры. В этой главе рассматриваются лишь конечные игры, т. е. такие, в которых каждый из игроков располагает конечным числом возможных стратегий.

Мы будем рассматривать главным образом такие примеры, в которых число стратегий равно двум или трем, однако эта же математическая теория пригодна и для игр со сколь угодно большим числом стратегий [1]. Игры, в которых один или несколько игроков располагают бесконечным числом стратегий, называют бесконечными играми [2].

Третий способ классификации игр — *по свойствам платежной функции*. Одним из важных типов платежных функций является платежная функция в *игре с нулевой суммой*, когда общая сумма выигрышей игроков равна нулю [3]. В игре двух участников с нулевой суммой выигрыш одного из партнеров равен проигрышу другого, т. е. налицо прямой конфликт между игроками. Прямой противоположностью играм такого типа являются игры двух участников с постоянной разностью, в которых игроки и выигрывают, и проигрывают одновременно, так что им выгодно действовать сообща. В общей игре с ненулевой суммой имеют место, как правило, и конфликты, и согласованные действия игроков.

В зависимости от *характера предварительной договоренности* между игроками различают кооперативные и некооперативные игры. Игра называется *кооперативной*, если до начала игры игроки образуют коалиции и принимают взаимообязывающие соглашения о своих стратегиях. Игра, в которой игроки не могут координировать свои стратегии подобным образом, называется *некооперативной*.

[1] Число стратегий в «салонных» играх хотя и достигает обычно астрономической величины, но остается конечным.

[2] Теория бесконечных игр рассматривается в сборниках статей под ред. Дрешера, Таккера и Вульфа [4], под ред. Дрешера, Шепли и Таккера [5] и в работе Карлина [6]. Примером бесконечной игры может служить игра на единичном квадрате, где стратегией каждого из игроков может быть любое число от 0 до 1. Другой пример — игра, в которой каждый из игроков выбирает в качестве своей стратегии некоторую траекторию из множества альтернативных траекторий. Игры такого типа называются *дифференциальными играми*; они содержат бесконечное число ходов и, следовательно, бесконечное число стратегий (см. гл. 15).

[3] Игры с нулевой суммой называют также антагонистическими играми. — *Прим. перев.*

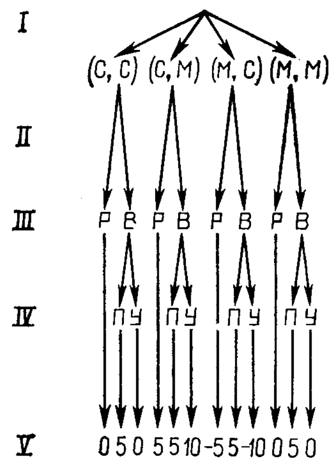

Рис. 6.1. Дерево игры для игры в развернутой форме, на примере упрощенной игры двух лиц в покер.
I — Ход 1: Определение ставок и сдача карт (случайный ход).
II — C: старшая; M: младшая.
Например, (C, M): игрок 1 имеет C, а игрок 2 имеет M
III — Ход 2: Игрок 1 либо раскрывает карты (P), либо повышает игру (B).
IV — Ход 3: Если игрок 1 повышает игру (B), то игрок 2 пасует ($П$) или уравнивает (V).
V — Выигрыш игрока 1 (проигрыш игрока 2)

Существует ряд способов описания и анализа конкретных игр. Один из приемов описания игры состоит в том, что указывает, какие ходы могут делать игроки, какой информацией во время игры они располагают, какие варианты можно выбирать и какими могут быть предельные размеры платежей в конце игры. Игра, описанная таким образом, называется игрой в *развернутой* (*экстенсивной*) форме [1], а само описание составляется обычно в виде *дерева игры*. На рис. 6.1 показано дерево игры для упрощенной игры двух лиц в покер. В этой игре ставка каждого из игроков равна 5 долл. После сдачи карт на руках у игроков остается определенное количество карт. Набор карт может быть либо «старшим» (C), либо «младшим» (M). (Ниже набор карт будем называть просто картой.) У игрока 1 имеется две возможности: либо раскрыть карты (P), либо повышать игру (B). При раскрытых картах старшая карта выигрывает банк; если же карты игроков равны, то банк делится пополам.

[1] В литературе на русском языке игры в развернутой (экстенсивной) форме называют также позиционными играми.— *Прим. перев.*

Если игрок 1 повышает игру, то он вкладывает в банк еще 5 долл. У игрока 2 после этого имеется две альтернативы: либо пасовать (П), либо уравнивать (У). Если он пасует, то игрок 1 выигрывает банк при любых картах. Если же игрок 2 уравнивает игру, то он вносит в банк еще 5 долл., после чего либо старшая карта выигрывает банк, либо при равных картах банк делится пополам. На дереве игры (см. рис. 6.1) изображены все возможные ситуации игры и указаны соответствующие им платежи.

Игра в развернутой форме является *игрой с полной информацией*, если в ней нельзя делать одновременно несколько ходов и если участникам известны выборы, сделанные при предшествующих ходах, включая и случайные ходы. Примерами игр с полной информацией являются шахматы и игра в крестики и нолики. Покер, напротив, представляет собой *игру с неполной информацией*, так как игрокам не известны некоторые выборы, сделанные при случайных ходах, — прежде всего им не известно, какие карты находятся на руках у противника.

Другой способ описания игры состоит в том, что рассматриваются все возможные стратегии каждого игрока и определяются платежи, соответствующие любой возможной комбинации стратегий всех игроков.

Описанная таким образом игра называется *игрой в нормальной форме*. Зная развернутую форму игры, можно получить и ее нормальную форму. Нормальная форма игры двух участников состоит из двух платежных матриц, показывающих, какую сумму получает каждый из игроков при любой из возможных пар стратегий. Обычно эти две матрицы выражают в форме единой матрицы, показанной на рис. 6.2. Элементами этой матрицы являются пары чисел, первое из которых определяет величину выигрыша игрока 1, а второе — игрока 2. Игрок 1 выбирает одну из m стратегий, обозначенных символами $S_1^1, S_2^1, \ldots, S_m^1$; каждой стратегии соответствует строка матрицы. Игрок 2 выбирает одну из n стратегий $S_1^2, S_2^2, \ldots, S_n^2$; каждой стратегии этого игрока соот-

$$\begin{array}{cc}
 & \overbrace{\begin{array}{cccc} S_1^2 & S_2^2 & S_j^2 & S_n^2 \end{array}}^{\textit{Игрок 2 выбирает стратегию}} \\
\begin{array}{c}\textit{Игрок 1}\\ \textit{выбирает}\\ \textit{стратегию}\end{array}\left\{\begin{array}{c} S_1^1 \\ S_2^1 \\ \\ S_i^1 \\ \\ S_m^1 \end{array}\right. & \begin{bmatrix} (\Pi_{11}^1, \Pi_{11}^2) & (\Pi_{12}^1, \Pi_{12}^2) & \cdots & (\Pi_{1n}^1, \Pi_{1n}^2) \\ (\Pi_{21}^1, \Pi_{21}^2) & (\Pi_{22}^1, \Pi_{22}^2) & & (\Pi_{2n}^1, \Pi_{2n}^2) \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & (\Pi_{ij}^1, \Pi_{ij}^2) & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ (\Pi_{m1}^1, \Pi_{m1}^2) & (\Pi_{m2}^1, \Pi_{m2}^2) & \cdots & (\Pi_{mn}^1, \Pi_{mn}^2) \end{bmatrix}
\end{array}$$

Рис. 6.2. **Платежная матрица для игры двух участников.**

ветствует столбец матрицы. Пара чисел на пересечении строки и столбца, которые соответствуют стратегиям, избранным игроками, показывает величину выигрыша каждого из них. Например, если игрок 1 избирает стратегию S_1^1, а игрок 2 — стратегию S_1^2, то выигрыш первого равен Π_{11}^1, а второго — Π_{11}^2. В общем случае, если игрок 1 выбирает S_i^1, а игрок 2 — S_j^2, то выигрыши игроков 1 и 2 равны соответственно Π_{ij}^1 и Π_{ij}^2 ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$).

Платежная матрица имеет размерность $m \times n$, где m — (конечное) число возможных стратегий игрока 1, а n — (конечное) число возможных стратегий игрока 2. Предполагается, что каждому из игроков известны все элементы платежных матриц.

6.2. ИГРЫ ДВУХ УЧАСТНИКОВ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

Игры двух участников с нулевой суммой составляют наиболее хорошо разработанную часть теории игр. Если игра представлена в нормальной форме, то вполне достаточно исследовать платежную матрицу только игрока 1. Действительно, нулевая сумма игры означает, что

$$\Pi_{ij}^1 + \Pi_{ij}^2 = 0. \qquad (6.2.1)$$

$$\begin{array}{cc}
 & \overbrace{\begin{array}{ccc} S_1^2 & S_j^2 & S_n^2 \end{array}}^{\begin{array}{c}\textit{Игрок 2}\\ \textit{выбирает столбец}\end{array}} \\
\begin{array}{c}\textit{Игрок 1}\\ \textit{выбирает}\\ \textit{строку}\end{array}\left\{\begin{array}{c} S_1^1 \\ S_i^1 \\ S_m^1 \end{array}\right. & \begin{bmatrix} \Pi_{11} & & \Pi_{1n} \\ & \Pi_{ij} & \\ \Pi_{m1} & & \Pi_{mn} \end{bmatrix}
\end{array}$$

Рис. 6.3. **Платежная матрица для игры двух участников с нулевой суммой.**

Следовательно, платежная матрица игрока 2 просто равна платежной матрице игрока 1, умноженной на (—1). Эта платежная матрица представлена на рис. 6.3, где

$$\Pi_{ij} = \Pi_{ij}^1 = -\Pi_{ij}^2. \qquad (6.2.2)$$

Если игрок 1 выбирает стратегию S_i^1 (i-ю строку матрицы), а игрок 2 выбирает S_j^2 (j-й столбец матрицы), то игрок 1 получает Π_{ij}, а игрок 2 получает — Π_{ij}. Игры такого типа называют *матричными*. В подобной игре игрок 1 стремится выбрать строку матрицы так, чтобы максимизировать свой выигрыш, а игрок 2 — такой столбец матрицы, при котором его проигрыш минимален.

Игрой с постоянной суммой называется игра, в которой

$$\Pi_{ij}^1 + \Pi_{ij}^2 = a = \mathrm{const}. \qquad (6.2.3)$$

Любую игру с постоянной суммой можно представить в виде некоторой матричной игры, поскольку прибавление какой-либо постоянной величины в каждой записи в матрице не влияет на результат. Если пары Π_{ij}^1, $a - \Pi_{ij}^1$ представляют собой элементы платежной матрицы, то, вычитая $\frac{a}{2}$ из каждого числа, входящего в эту пару, получаем

$$(\hat{\Pi}_{ij}^1, \hat{\Pi}_{ij}^2) = \left(\Pi_{ij}^1 - \frac{a}{2}, \quad -\Pi_{ij}^2 + \frac{a}{2}\right),$$

где $\hat{\Pi}_{ij}^1 = -\hat{\Pi}_{ij}^2$.

В качестве основного допущения в теории игр двух лиц с нулевой суммой принимается, что каждый игрок стремится обеспечить себе максимально возможный выигрыш при любых действиях противника. Однако наибольший гарантированный выигрыш определяется при том условии, что избранная данным игроком стратегия становится известной противнику, который затем выбирает свою оптимальную стратегию. Пусть игрок 1 считает, что, какую бы строку он ни выбрал, игрок 2 выберет столбец, максимизирующий его выигрыш и тем самым минимизирующий выигрыш игрока 1. Тогда можно исключить из платежной матрицы все элементы, оставив в каждой строке только по одному элементу, соответствующему минимальному платежу. Оптимальная стратегия игрока 1, которая обеспечит ему наибольший из возможных выигрышей вне зависимости от стратегии противника, будет состоять в выборе строки с самым высоким из таких минимальных платежей. Таким образом, игрок 1 выбирает i-ю стратегию, которая является решением задачи,

$$\max_i \min_j \Pi_{ij}. \tag{6.2.4}$$

Стратегия, соответствующая максимальному значению минимумов строк, называется *максиминной стратегией*.

Игрок 2 точно так же стремится обеспечить себе наивысшую величину выигрыша (т. е. наименьшее значение платежа своему противнику) вне зависимости от стратегии, избираемой партнером. Следовательно, игрок 2 может исключить из платежной матрицы все элементы, оставив в столбце только по одному элементу, соответствующему максимальному платежу. Его оптимальной стратегией будет столбец с наименьшим значением максимального платежа. Таким образом, игрок 2 выбирает j-ю стратегию, которая является решением задачи

$$\min_j \max_i \Pi_{ij}. \tag{6.2.5}$$

Стратегия, соответствующая минимальному значению максимумов столбцов, называется *минимаксной стратегией*.

Если игрок 1 придерживается максиминной стратегии, то его выигрыш будет не меньше максиминного значения, т. е.

$$\Pi_{ij} \geqslant \max \min \Pi_{ij}. \tag{6.2.6}$$

Если игрок 2 избирает минимаксную стратегию, то его проигрыш будет не больше минимаксного значения, т. е.

$$\Pi_{ij} \leqslant \min \max \Pi_{ij}. \tag{6.2.7}$$

Если

$$\max \min \Pi_{ij} = \min \max \Pi_{ij} = \Pi^*_{ij}, \tag{6.2.8}$$

то игроки получают свои гарантированные платежи. В этом случае их стратегии оказываются совместимыми, а платежная матрица имеет *седловую точку* на пересечении i-й строки и j-го столбца, т. е. элемент Π_{ij} является одновременно минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце.

На рис. 6.4 дан пример игры, в которой игрок 1 располагает двумя стратегиями, а игрок 2 — тремя. Игрок 1 рассчитывает, что если он выберет первую строку, то противник может выбрать второй столбец, так что выигрыш будет равен 1. Если же он выберет вторую строку, то противник может взять первый столбец, так что выигрыш будет равен —1. Эти два числа есть не что иное, как минимумы строк, показанные на рис. 6.4.

Взяв максимальное значение этих минимумов, игрок 1 останавливается на своей первой стратегии, которая обеспечивает ему выигрыш, равный 1 (или больший выигрыш, если игрок 2 выберет первый или третий столбец). Точно так же и игрок 2 рассматривает наихудшие варианты, когда противник выбирает первую строку, в то время как он сам взял первый или второй столбец, или же когда противник выбирает вторую строку, в то время как у него выбран третий столбец. Эти варианты соответствуют максимальным значениям столбцов 2, 1 и 6. Взяв максимальное значение этих максимумов, игрок 2 останавливается на своей второй стратегии, при которой его проигрыш

$$\begin{array}{rc c}
 & & \text{Минимальные элементы строк} \\
 & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \boxed{1} \\ -1 \end{array} \\
\text{Максимальные элементы столбцов} & \begin{array}{ccc} 2 & \boxed{1} & 6 \end{array} &
\end{array}$$

Рис. 6.4. Игра двух участников с нулевой суммой, имеющая седловую точку (вполне определенная игра).

не превосходит 1. Следовательно, в этой игре существуют совместимые выборы, т. е.

$$\max\min \Pi_{ij} = \min\max \Pi_{ij} = 1, \tag{6.2.9}$$

и, следовательно, существует седловая точка матрицы, являющаяся *ценой игры* (для игрока 1). Седловая точка соответствует положению равновесия, если один из игроков использует стратегию, соответствующую седловой точке, то другому выгоднее всего избрать свою стратегию, также отвечающую седловой точке. Так, если в примере на рис. 6.4. игрок 1 использует первую стратегию, то для игрока 2 оптимальной будет вторая стратегия, а если игрок 2 применяет вторую стратегию, то для игрока 1 оптимальной будет первая стратегия. Игра двух участников с нулевой суммой, имеющая седловую точку, называется *вполне определенной*. Разумно ожидать, что в игре такого типа оба партнера изберут стратегию седловой точки. Однако не все игры двух участников с нулевой суммой являются вполне определенными. В общем случае

$$\max\min \Pi_{ij} \leqslant \min\max \Pi_{ij}. \tag{6.2.10}$$

Игры, в которых выполняется строгое неравенство, называются *не полностью определенными играми* без седловой точки. Пример такой игры, для которой

$$\max\min \Pi_{ij} = -2 < 4 = \min\max \Pi_{ij} \tag{6.2.11}$$

приведен на рис. 6.5. Если игроки следуют изложенным ранее правилам, то игрок 1 выберет стратегию 1 и будет ожидать, что игрок 2 выберет стратегию 2, при которой проигрыш равен — 2, в то время как игрок 2 изберет стратегию 3 и будет ожидать, что игрок 1 выберет стратегию 2 с выигрышем, равным 4. Однако результат $\Pi_{13} = 3$ оказывается одинаково неожиданным для обоих игроков. На самом деле, если игрок 2 выберет свою третью стратегию, то игрок 1 поступит правильнее, выбирая вторую, а не первую стратегию. Аналогично, если игрок 1 выберет первую стратегию, то игроку 2 выгоднее выбрать вторую стратегию, а не третью. По всей видимости, в играх такого типа принцип решения в той форме, как он изложен выше, оказывается непригодным.

$$\begin{array}{lc c}
 & & \text{Минимальные элементы строк} \\
 & \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \boxed{-2} \\ -4 \end{array} \\
\text{Максимальные элементы столбцов} & \begin{array}{ccc} 6 & 5 & \boxed{4} \end{array} &
\end{array}$$

Рис. 6.5. Игра двух участников с нулевой суммой, не имеющая седловой точки (неполностью определенная игра).

Однако этот принцип решения остается верным, если расширить понятие стратегии за счет *смешанных* (или *случайных*) *стратегий*. Стратегии, рассматривавшиеся до сих пор, называются *чистыми*. Смешанная стратегия представляет собой вероятностную комбинацию чистых стратегий, т. е. ряд чистых стратегий, взятых в случайном порядке с некоторыми вероятностями. Так, например m строк платежной матрицы являются чистыми стратегиями игрока 1. Смешанную стратегию для игрока 1 можно указать с помощью вектора (вектора-строки) вероятностей

$$\mathbf{p}^1 = (p_1^1,\ p_2^1,\ \ldots,\ p_m^1), \tag{6.2.12}$$

где p_i^1 — вероятность выбрать i-ю стратегию ($i = 1, 2, \ldots, m$). Например, вектор ($^1/_3$, $^2/_3$, 0, ..., 0) соответствует смешанной стратегии, при которой игрок 1 выбирает строку 1 с вероятностью $^1/_3$ и строку 2 с вероятностью $^2/_3$. Так как числа, входящие в вектор $\mathbf{p}^1$, являются вероятностями, то они должны быть неотрицательными, а их сумма должна равняться единице, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} p_i^1 = 1,\ p_i^1 \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, m. \tag{6.2.13}$$

Эти условия можно записать и в векторных обозначениях

$$\mathbf{p}^1\mathbf{1}' = 1, \quad \mathbf{p}^1 \geqslant \mathbf{0}, \tag{6.2.14}$$

где $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$,

т. е. это вектор-строка с элементами, равными единице.

Точно так же игрок 2 выбирает вектор (вектор-столбец) вероятностей

$$\mathbf{p}^2 = (p_1^2,\ p_2^2,\ \ldots,\ p_n^2)', \tag{6.2.15}$$

где p_j^2 — вероятность выбрать j-ю стратегию; $j = 1, 2, \ldots, n$, причем можно брать любой вектор $\mathbf{p}^2$, в котором

$$\mathbf{1p}^2 = 1, \quad \mathbf{p}^2 \geqslant \mathbf{0}. \tag{6.2.16}$$

Отметим, что чистые стратегии можно рассматривать как частный случай смешанной стратегии, когда вектор вероятностей представляет собой единичный вектор. Так, вектор-строка (0, 1, 0, . . ., 0) означает, что игрок 2 выбирает вторую строку матрицы — вторую чистую стратегию, поскольку вероятность выбрать ее равна единице.

Основной теоремой в теории игр двух лиц с нулевой суммой является *теорема о минимаксе*, согласно которой любая конечная игра имеет решение, если допускается использование смешанных стратегий [1]. Вполне определенная игра имеет решение в области чистых стратегий, причем это решение может быть не единственным. Не полностью определенная игра имеет решение возможно не единственное, при котором хотя бы один из игроков применяет случайное комбинирование (смешивание) стратегий.

Так как при выборе стратегий используется вероятностный подход, то выигрыш игрока 1 (проигрыш игрока 2) уже является не некоторым отдельным элементом платежной матрицы, а взвешенным средним значением элементов, причем в качестве весов этой матрицы берутся вероятности. Так, ожидаемый выигрыш (математическое ожидание выигрыша) игрока 1 в предположении, что он использует вектор вероятностей $\mathbf{p}^1 = (p_1^1, p_2^1, \ldots, p_m^1)$, а игрок 2 применяет свою j-ю стратегию, равен

$$p_1^1\Pi_{1j} + p_2^1\Pi_{2j} + \ldots + p_m^1\Pi_{mj} = \mathbf{p}^1\Pi\mathbf{e}_j', \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.2.17}$$

где $\Pi = (\Pi_{ij})$ — платежная матрица, а $\mathbf{e}_j$ есть j-й единичный вектор (j-я строка единичной матрицы). Игрок 1, стремящийся достичь наибольшего из гарантированных ожидаемых выигрышей, выбирает вектор вероятностей так, чтобы получить максимум минимальных значений ожидаемых выигрышей. Если обозначить

$$\Pi^1(\mathbf{p}^1) = \min_j \mathbf{p}^1\Pi\mathbf{e}_j', \tag{6.2.18}$$

то игрок 1 действует таким образом, чтобы

$$\max_{\mathbf{p}^1} \Pi^1(\mathbf{p}^1) = \max_{\mathbf{p}^1} \min_j \mathbf{p}^1\Pi\mathbf{e}_j'. \tag{6.2.19}$$

Ожидаемый выигрыш (математическое ожидание выигрыша) игрока 2 в предположении, что он использует вектор вероятностей $\mathbf{p}^2 = (p_1^2, p_2^2, \ldots, p_n^2)'$, а игрок 1 выбрал i-ю стратегию, равен

$$\Pi_{i1}p_1^2 + \Pi_{i2}p_2^2 + \ldots + \Pi_{in}p_n^2 = \mathbf{e}_i\Pi\mathbf{p}^2, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{6.2.20}$$

Цель игрока 2 — достичь минимума максимальных значений ожидаемых платежей

$$\max_i \mathbf{e}_i\Pi\mathbf{p}^2. \tag{6.2.21}$$

Следовательно, игрок 2 выбирает $\mathbf{p}^2$ так, чтобы

$$\min_{\mathbf{p}^2} \Pi^2(\mathbf{p}^2) = \min_{\mathbf{p}^2} \max_i \mathbf{e}_i\Pi\mathbf{p}^2. \tag{6.2.22}$$

Согласно теореме о минимаксе, существуют решения для (6.2.19) и (6.2.22) — $\mathbf{p}^{1*}$ и $\mathbf{p}^{2*}$. Если положить

$$V = \mathbf{p}^{1*}\Pi\mathbf{p}^{2*} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i^{1*}\Pi_{ij}p_j^{2*}, \tag{6.2.23}$$

то при любых векторах вероятностей $\mathbf{p}^1$ и $\mathbf{p}^2$ выполняются соотношения

$$\mathbf{p}^1\Pi\mathbf{p}^{2*} \leqslant V \leqslant \mathbf{p}^{1*}\Pi\mathbf{p}^2 \tag{6.2.24}$$

и

$$\max_{\mathbf{p}^1} \mathbf{p}^1\Pi\mathbf{p}^{2*} = V = \min_{\mathbf{p}^2} \mathbf{p}^{1*}\Pi\mathbf{p}^2. \tag{6.2.25}$$

Следовательно, V — цена игры — является одновременно максимальным ожидаемым выигрышем игрока 1 и минимальным ожидаемым проигрышем игрока 2. Таким образом, теорема о минимаксе утверждает, что существует хотя бы одна пара смешанных стратегий $\mathbf{p}^1$, $\mathbf{p}^2$, при которых максиминное и минимаксное значение ожидаемых платежей совпадает, т. е.

$$V = \max_{\mathbf{p}^1} \min_{\mathbf{p}^2} \mathbf{p}^1\Pi\mathbf{p}^2 = \min_{\mathbf{p}^2} \max_{\mathbf{p}^1} \mathbf{p}^1\Pi\mathbf{p}^2, \tag{6.2.26}$$

---

[1] Минимаксная теорема была доказана фон Нейманом [7]. См. также работы Гейла, Куна и Таккера [8] и Нэша [9]. Эта теорема может быть доказана различными способами, в том числе с использованием теоремы двойственности теории линейного программирования или с помощью теорем о неподвижных точках, или же с помощью теорем отделимости для выпуклых множеств. Для бесконечных игр теорема о минимаксе не выполняется. Например, такие игры, как игра, в которой два игрока записывают какие-либо числа и написавший большее число выигрывает некоторую сумму у противника, не имеют решений ни в чистых, ни в смешанных стратегиях.

так что любая конечная игра имеет седловую точку в пространстве векторов вероятностей. Цена игры V единственна, а соответствующие ей векторы вероятностей оптимальных смешанных стратегий, согласно (6.2.23), могут быть и не единственными. Однако, если существует более чем одна пара оптимальных смешанных стратегий, то все эти пары стратегий образуют замкнутое выпуклое многогранное множество, причем все входящие в это множество пары доставляют игре одну и ту же цену.

Одно из доказательств теоремы о минимаксе использует теорему двойственности линейного программирования. То, что игрок 1 рассматривает минимальные ожидаемые выигрыши, мы записали ранее с помощью выражения (6.2.18). Это условие можно представить и в форме линейных неравенств

$$\mathbf{p}^1\mathbf{\Pi}\mathbf{e}_j' = \sum_{i=1}^{m} p_i^1\Pi_{ij} \geqslant \Pi^1(\mathbf{p}^1) = \min p^1 \Pi \qquad (6.2.27)$$
$$j = 1, 2, \ldots, n.$$

Если, как и прежде, обозначить символом **1** **вектор**-строку из единиц, то эти неравенства можно записать в эквивалентной форме

$$\mathbf{p}^1\mathbf{\Pi} - \Pi^1(\mathbf{p}^1)\,\mathbf{1} \geqslant 0. \qquad (6.2.28)$$

Тогда задача (6.2.19), стоящая перед игроком **1**, может быть сформулирована как следующая задача линейного программирования:

найти

$$\max_{\mathbf{p}^1} \Pi^1(\mathbf{p}^1)$$

при условии, что

$$\begin{gathered} \mathbf{p}^1\mathbf{\Pi} - \Pi^1(\mathbf{p}^1)\,\mathbf{1} \geqslant 0 \\ \mathbf{p}^1\mathbf{1}' = 1 \\ \mathbf{p}^1 \geqslant 0. \end{gathered} \qquad (6.2.29)$$

Задачу игрока 2, который минимизирует максимальные платежи, также можно сформулировать как задачу линейного программирования:

найти $\min\limits_{\mathbf{p}^2} \Pi^2(\mathbf{p}^2)$

при условии, что

$$\begin{gathered} \mathbf{\Pi}\mathbf{p}^2 - \mathbf{1}'\Pi^2(\mathbf{p}^2) \leqslant 0 \\ \mathbf{1}\mathbf{p}^2 = 1 \\ \mathbf{p}^2 \geqslant 0. \end{gathered} \qquad (6.2.30)$$

	p_1^2	p_2^2	$\cdots$	p_n^2	$-\Pi^2(\mathbf{p}^2)$	
p_1^1	Π_{11}	Π_{12}	$\cdots$	Π_{1n}	1	≤ 0
p_2^1	Π_{21}	Π_{22}	$\cdots$	Π_{2n}	1	≤ 0
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p_m^1	Π_{m1}	Π_{m2}	$\cdots$	Π_{mn}	1	≤ 0
$-\Pi^1(\mathbf{p}^1)$	1	1	$\cdots$	1	1	$=1-\Pi^2(p^2)$. *Найти* $\max[1-\Pi^2(\mathbf{p}^2)]$, *т.е. найти* $\min \Pi^2(p^2)$
	≥ 0	≥ 0	$\cdots$	≥ 0	$=1-\Pi^1(\mathbf{p}^1)$. *Найти* $\min(1-\Pi^1(p^1))$, *т.е. найти* $\max \Pi^1(p^1)$	

Рис. 6.6. Двойственные задачи определения оптимальных смешанных стратегий, представленные в форме таблицы для задач линейного программирования.

Эти две задачи являются двойственными задачами линейного программирования, что легко видеть из таблицы на рис. 6.6, аналогичной таблице на рис. 5.3. Представленная таблица является краткой формой записи обеих задач, если положить

$$\begin{gathered} p_m^1 = 1 - \sum_{i=1}^{m-1} p_i^1 \\ p_n^2 = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} p_j^2 \end{gathered} \qquad (6.2.31)$$

для того, чтобы сумма вероятностей равнялась единице. Так как для каждой из задач существует допустимый вектор (например, единичные векторы), то по теореме существования теории линейного программирования эти задачи имеют решения $\mathbf{p}^{1*}$ и $\mathbf{p}^{2*}$ соответственно. Но по теореме двойственности

$$\Pi^1(\mathbf{p}^{1*}) = \max_{\mathbf{p}^1} \Pi^1(\mathbf{p}^1) = V = \min_{\mathbf{p}^2} \Pi^2(\mathbf{p}^2) = \Pi^2(\mathbf{p}^{2*}), \qquad (6.2.32)$$

где V — цена игры. Таким образом, теорема о минимаксе теории игр вытекает из теоремы двойственности теории линейного программирования. Кроме того, из теоремы о дополняющей нежесткости следует, что

$$
\text{либо} \sum_{i=1}^{m} p_i^{1*}\Pi_{ij} = V, \text{ либо } p_j^{2*} = 0, \; j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (6.2.33)
$$

$$
\text{либо} \sum_{j=1}^{n} \Pi_{ij} p_j^{2*} = V, \text{ либо } p_i^{1*} = 0, \; i = 1, 2, \ldots, m.
$$

Эти соотношения часто называют *сильной теоремой о минимаксе*. Эта теорема утверждает, в частности, что если при некоторой чистой стратегии игрока 2 ожидаемый выигрыш игрока 1 превосходит цену игры, то игрок 2 избирает эту стратегию с нулевой вероятностью.

В общем случае следует ожидать, что в игре двух участников с нулевой суммой оба игрока применяют свои оптимальные смешанные стратегии. В частном случае вполне определенной игры оптимальной смешанной стратегией будет такая стратегия, в которой чистой стратегии, соответствующей седловой точке, приписана вероятность, равная единице, т. е. векторы оптимальных стратегий единичные. Вообще число ненулевых элементов в векторе оптимальной смешанной стратегии не должно превышать минимальное количество чистых стратегий, имеющихся в распоряжении каждого игрока.

Применяя смешанные стратегии, партнеры ни в одной из партий игры не открывают друг другу своих истинных стратегий. Данная стратегия выбирается с помощью какого-нибудь механизма случайного выбора (бросание монеты или игральной кости, таблица случайных чисел и т. д.), причем используемые стратегии находятся в соответствии с оптимальными вероятностями. Если бы противнику было известно, какая именно стратегия будет применена в данной партии, то он мог бы использовать это знание с выгодой для себя. Однако он не может извлечь никакой полезной информации из знания оптимальных вероятностей партнера.

В общем случае можно определить оптимальные смешанные стратегии, решая двойственные задачи линейного программирования, представленные в таблице на рис. 6.6. Но если один из игроков располагает только двумя (чистыми) стратегиями, то значения его оптимальных вероятностей можно найти графически. В качестве примера рассмотрим не полностью определенную игру, показан-

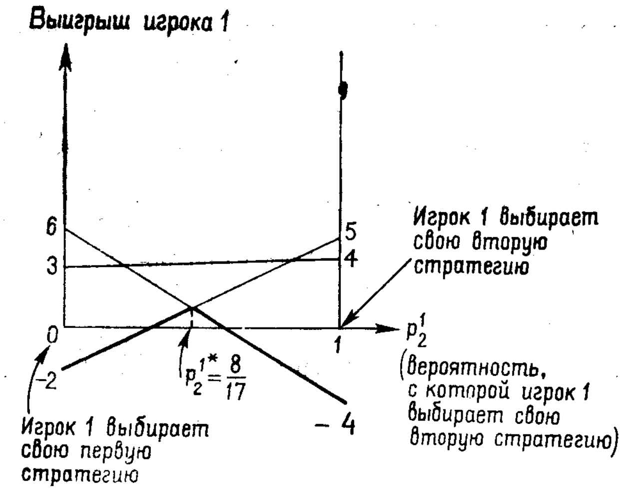

Рис. 6.7. Графическое решение игры, изображенной на рис. 6.5, для игрока 1.

ную на рис. 6.5. Графическое решение этой игры дано на рис. 6.7. Здесь по горизонтальной оси откладывается значение p_2^1 — вероятность того, что игрок 1 избирает вторую стратегию (вторую строку матрицы). Так как $p_2^1 = 1 - p_1^1$, то точки 0 и 1 соответствуют двум чистым стратегиям — выбору соответственно строк 1 и 2. По вертикальной оси откладывается величина выигрыша игрока 1, а каждая из проведенных линий соответствует некоторой чистой стратегии, выбранной игроком 2. Например, если игрок 2 выбирает первый столбец, то выигрыш игрока 1 равен либо 6 при выборе им первой строки ($p_2^1 = 0$), либо — 4, если он избирает вторую строку ($p_2^1 = 1$). Величина выигрыша, равная 6, отложена по вертикальной оси в левой части чертежа, а величина выигрыша, равная — 4, представлена отрезком, отложенным по вертикали в правой части. Выигрыши, которые можно получить при любой из смешанных стратегий, соответствуют точкам прямой соединяющей концы этих отрезков. Поскольку игрок 1 рассматривает прежде всего наихудшие для себя варианты, то единственным геометрическим местом точек, которое соответствует осуществимым стратегиям, являются два отрезка, сходящиеся в форме перевернутой буквы V. Это геометрическое место точек показано жирной линией.

Точки этих отрезков отвечают наименьшим значениям ожидаемых выигрышей игрока 1, которые он может получить при той или иной вероятности выбрать вторую строку. Максимальному выигрышу соответствует $p_2^{1*} = {}^8/_{17}$. Это можно показать либо геометрически, либо решая алгебраическое уравнение

$$-2\left(1-p_2^1\right)+5p_2^1=6\left(1-p_2^1\right)-4p_2^1. \qquad (6.2.34)$$

Итак, игрок 1 должен выбирать свою первую стратегию с вероятностью ${}^9/_{17}$, а вторую — с вероятностью ${}^8/_{17}$. Цена игры равна

$$V=-2\left(\frac{9}{17}\right)+5\left(\frac{8}{17}\right)=6\left(\frac{9}{17}\right)-4\left(\frac{8}{17}\right)=\frac{22}{17}. \qquad (6.2.35)$$

6.3. ИГРЫ ДВУХ УЧАСТНИКОВ С НЕНУЛЕВОЙ СУММОЙ

В игре с ненулевой суммой уже не обязательно, чтобы один из участников выигрывал, а другой проигрывал; напротив, они могут и выигрывать, и проигрывать совместно. Поскольку интересы игроков теперь не являются полностью противоположными, то имеется возможность угрожать противнику, блефовать, сообщать друг другу о своих намерениях, накапливать опыт игры. Так, например, если в игре с нулевой суммой игрокам не выгодно открывать друг другу свои стратегии, то в игре с ненулевой суммой иной раз желательно координировать свои действия с партнером или каким-либо способом влиять на его действия.

Потребность в сообщении между партнерами и в координировании их действий совершенно очевидна в координированных играх, в которых платежи обоих игроков либо одинаковы, либо в более общем случае различаются на постоянную величину, так что игроки и выигрывают, и проигрывают совместно. Предположим в качестве примера, что два человека оказались в горящем доме. Дверь так сильно захлопнута, что ее можно открыть только совместными усилиями. Платежи показаны на рис. 6.8 (эта таблица составлена в той же форме, что и матрица на рис. 6.2). Действуя вместе, оба человека могут спастись — выигрыш каждого в этом случае равен 100; в противном случае могут пострадать оба — выигрыш каждого

		Второй человек: Толкать дверь	Второй человек: Не толкать дверь
Первый человек	Толкать дверь	(100, 100)	(0,0)
	Не толкать дверь	(0,0)	(0,0)

Рис. 6.8. Платежная матрица игры «двое в горящем доме».

равен 0. Очевидно, что для них лучше всего действовать сообща.

В качестве примера игры с ненулевой суммой рассмотрим еще одну игру. Двое подростков едут навстречу друг другу на автомобилях; проигравшим считается тот, кто первым свернет в сторону. Платежи указаны на рис. 6.9. Если один свернул в сторону, а другой нет, то «выигравший» игрок получает 5, а «проигравший» (свернувший с дороги) получает —5. Если же сворачивают оба, то состязание оканчивается вничью и выигрыши равны нулю. Если же никто из них не свернул в сторону, то игра завершается аварией — выигрыш каждого равен — 100. Здесь ни один из игроков не располагает доминирующей стратегией, которая является наилучшей при любых предположениях о поведении другого игрока. Если бы каждый из них мог убедить другого, что он намеревается свернуть, то они бы сыграли вничью, однако каждый испытывает желание выиграть, нарушив любое подобное соглашение. Если нарушают договоренность оба, то исходом является катастрофа.

		Водитель 2: Сворачивать	Водитель 2: Не сворачивать
Водитель 1	Сворачивать	(0,0)	(−5,5)
	Не сворачивать	(5,−5)	(−100,−100)

Рис. 6.9. Игра подростков на автомобилях.

Игры с ненулевой суммой могут быть *кооперативными* или *некооперативными*. В некооперативных играх игроки принимают решения независимо друг от друга либо потому, что координация запрещена, либо потому, что осуществление соглашения невозможно. Примером первой ситуации могут служить антитрестовские законы, запрещающие некоторые виды соглашений между фирмами, а примером второй — заключение международных торговых соглашений, навязать которые трудно или невозможно.

Один из подходов к решению некооперативных игр состоит в определении *точки* (*точек*) *равновесия игры*, т. е. точки (точек), где ни один из игроков не имеет никаких причин отказываться от своей стратегии независимых действий [1]. В игре двух подростков существуют две точки равновесия: (5, —5) и (—5, 5), где один игрок сворачивает в сторону, а другой нет.

Для того чтобы дать точное определение понятию точки равновесия, используя понятие смешанной стратегии, предположим, что если игрок 1 выбирает стратегию S^1_i, а игрок 2 — стратегию S^2_j, то, как и на рис. 6.2, выигрыш первого игрока равен Π^1_{ij}, а выигрыш второго — Π^2_{ij}. Если вероятность того, что игрок 1 выберет i-ю чистую стратегию S^1_i, равна p^1_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), то смешанная стратегия первого игрока выражается вектором

$$\mathbf{p}^1 = (p^1_1, p^1_2, \ldots, p^1_m), \text{ где } \mathbf{p}^1\mathbf{1}' = 1, \ \mathbf{p}^1 \geqslant 0. \quad (6.3.1)$$

Аналогично, если p^2_j — вероятность выбора j-й чистой стратегии S^2_j игроком 2 ($j = 1, 2, \ldots, n$), то смешанная стратегия второго игрока выражается вектором

$$\mathbf{p}^2 = (p^2_1, p^2_2, \ldots, p^2_n)', \text{ где } \mathbf{1}\mathbf{p}^2 = 1, \ \mathbf{p}^2 \geqslant 0. \quad (6.3.2)$$

Точкой равновесия является пара векторов $\mathbf{p}^{1*}$, $\mathbf{p}^{2*}$, определяющих оптимальные смешанные стратегии каждого из игроков, т. е. стратегии, приводящие данного игрока к максимальному ожидаемому выигрышу при условии, что противник применяет свою (оптимальную) смешанную стратегию. Следовательно,

$$\mathbf{p}^1\Pi^1\mathbf{p}^{2*} \leqslant \mathbf{p}^{1*}\Pi^1\mathbf{p}^{2*} \text{ для всех } \mathbf{p}^1, \quad (6.3.3)$$
$$\mathbf{p}^{1*}\Pi^2\mathbf{p}^2 \leqslant \mathbf{p}^{1*}\Pi^2\mathbf{p}^{2*} \text{ для всех } \mathbf{p}^2.$$

В каждой конечной игре двух лиц существует пара векторов смешанных стратегий, приводящих к точке равновесия. Такая пара векторов может быть не единственной, и может оказаться, что различным парам соответствуют различные значения (ожидаемого) выигрыша. Вообще говоря, в каждой игре n лиц с конечным числом стратегий существуют смешанные стратегии, приводящие к равновесию. Равновесие — это набор таких смешанных стратегий, которые невыгодно самостоятельно изменять ни одному из игроков.

6.4. КООПЕРАТИВНЫЕ ИГРЫ

Кооперативной игрой называется игра с непостоянной суммой, в которой игрокам разрешается обсуждать перед игрой свои стратегии и договариваться о совместных действиях; иначе говоря, игроки могут образовывать коалиции. Основная задача в кооперативной игре состоит в дележе общего выигрыша между членами коалиции. Следует различать кооперативные игры с побочными платежами, в которых платежи являются переводимыми, и игры без побочных платежей, в которых платежи непереводимы.

Один из принципов решения кооперативной игры без побочных платежей для двух игроков известен как *решение Нэша*[1]. Игроки достигают некоторого соглашения о согласовании своих стратегий, причем если бы им не удалось скоординировать свои действия, то каждый игрок получил бы некоторый фиксированный платеж. Этот платеж называется *платежом при угрозе*. Так, например, в соответствующей некооперативной игре точкой угрозы могли бы быть максиминные платежи.

Нэш указал ряд разумных допущений, при которых решение игры с торгом является единственным. Первое допущение — *симметрия*; предполагается, что решение не зависит от того, какие номера присвоены игрокам. Второе допущение — *инвариантность относительно ли-*

[1] Эти точки называют также точками «равновесия по Нэшу» [10]. Определение точек равновесия отнюдь не является единственным возможным способом решения некооперативных игр. Другие методы решения: принцип максимина (максимизация своих минимальных выигрышей, см. раздел 6.1); принцип максимакса (максимизация своих максимальных выигрышей); принцип максимальной суммы (максимизация суммы выигрышей); принцип максимальной разности (максимизация разности выигрышей).

[1] См. [12, 13]. Обобщение для игры с более чем двумя игроками рассматриваются в работах Харсаньи [14, 15].

нейных преобразований: решение не зависит от монотонных линейных преобразований платежей. Третье допущение — *независимость от не имеющих отношения к делу альтернатив*: решение не изменится, если исключить из рассмотрения те возможные выборы, которые не использованы в решении. Четвертое допущение — *оптимальность по Парето*: не может быть решением такой набор платежей, помимо которого существует какой-нибудь другой набор платежей, более выгодный хотя бы для одного игрока. Если эти условия выполнены, то единственным решением является пара платежей (Π^{1*}, Π^{2*}), которые максимизируют произведение превышений этих платежей над платежами при угрозе

$$\max_{\Pi^1,\,\Pi^2} (\Pi^1 - T^1)(\Pi^2 - T^2). \qquad (6.4.1)$$

Здесь Π^1, Π^2 — выигрыш каждого игрока; T^1, T^2 — выигрыши каждого игрока в точке угрозы.

На рис. 6.10 решение представлено в геометрической форме. Заштрихованная часть плоскости соответствует множеству возможных платежей; это множество выпукло, так как игроки могут применять смешанные стратегии. Прямой линией на границе множества отмечена «передовая линия» платежей, т. е. множество всех пар платежей, которые удовлетворяют допущению оптимальности по Парето. Точкой угрозы является точка T, а решением Нэша является точка S, в которой передовая линия платежей достигает линии наибольшего уровня. Линии уровня в данном случае — это равносторонние гиперболы с центром в T. Решение является единственным: оно принадлежит *переговорному множеству*, т. е. множеству всех точек на передовой линии платежей, в которых выигрыши игроков больше, чем в точке угрозы.

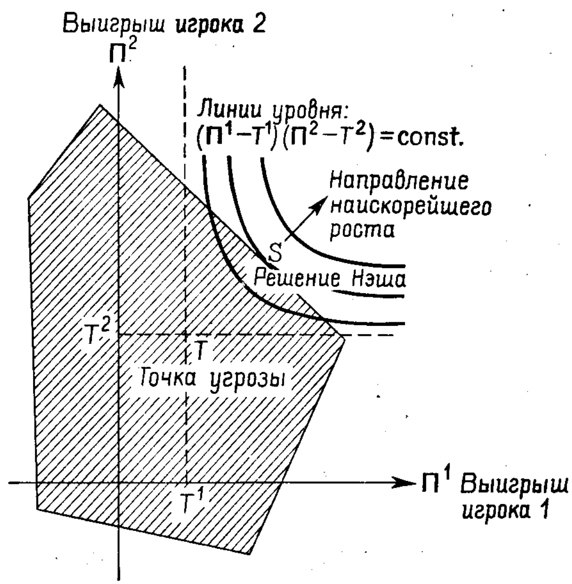

Рис. 6.10. Решение Нэша в задаче торгов.

Кооперативными играми с побочными платежами называются игры, в которых допускается заключение взаимно-обязывающих соглашений о стратегиях, а платежи могут перераспределяться между игроками. Поскольку разрешены побочные платежи, то следует рассматривать только общие выигрыши любых возможных коалиций. Игры такого типа можно анализировать, пользуясь *характеристической функцией игры*, с помощью которой описываются все возможные коалиции, а именно указывается, какой максимальный общий выигрыш может гарантировать себе каждая из коалиций. Если известно множество игроков в игре n лиц

$$N = \{1, 2, \ldots, n\}, \qquad (6.4.2)$$

то любое подмножество S множества N является коалицией; характеристическая функция указывает, чему равен гарантированный выигрыш для S. Таким образом, характеристическая функция представляет собой вещественную функцию, область определения которой состоит из 2^n возможных подмножеств множества N [1]. Запишем эту функцию в виде

$$v(S), \text{ где } S \subset N. \qquad (6.4.3)$$

Пример характеристической функции для игры трех лиц представлен на рис. 6.11. Здесь каждая из четырех

[1] Кооперативные игры без побочных платежей можно анализировать с помощью векторной функции, которая характеризует все возможные коалиции, указывая максимальное значение выигрыша, который может обеспечить себе каждый член коалиции. См. [16].

$$\nu(\phi) = 0$$
$$\nu(1) = 0 \quad \nu(2) = 0, \quad \nu(3) = 0$$
$$\nu(1,2) = 0, \quad \nu(1,3) = 0{,}2, \quad \nu(2,3) = 0{,}2$$
$$\nu(1,2,3) = \nu(N) = 1$$

Рис. 6.11. Характеристическая функция для игры трех участников.

строк соответствует значениям характеристической функции для коалиций, число игроков в которых равно соответственно 0, 1, 2, 3. Первая строка отражает предположение, что максимальный выигрыш для пустого множества равен нулю. Вторая строка показывает, что выигрыш любого игрока, действующего в одиночку, равен нулю. В третьей строке указаны выигрыши трех коалиций, которые могут быть составлены из двух игроков. Если игроки 1 и 2 действуют совместно, они могут гарантировать себе выигрыш в размере 0,1; коалициям игроков 1 и 3 или 2 и 3 гарантирован выигрыш, равный 0,2. Наконец, последняя строка показывает, что если все игроки объединяются в «большую коалицию», то выигрыш равен 1. Рассматриваемая игра представлена в *нормализованной форме* 0 — 1:

$$v(i) = 0 \text{ при любом } i \in N, \tag{6.4.4}$$
$$v(N) = 1, \text{ где } N = \{1, \ldots, n\},$$

т. е. выигрыш самостоятельно действующего игрока равен нулю, а выигрыш большой коалиции, включающей всех игроков, равен единице. Если для всех непересекающихся подмножеств A и B выполняется неравенство

$$v(A \cup B) \geqslant v(A) + v(B), \tag{6.4.5}$$

то характеристическая функция является супераддитивной. Это значит, что если нет ни одного игрока, который входил бы в обе коалиции A и B, то коалиция, составленная как объединение этих двух подмножеств, будет иметь выигрыш, не меньший, чем сумма выигрышей A и B. Предположение о супераддитивности характеристической функции вполне приемлемо, поскольку создание коалиций было бы бессмысленным, если бы величина выигрыша уменьшалась с увеличением числа участников коалиции.

Вектор $\mathbf{\Pi}$ n-мерного евклидова пространства, компонентами которого являются суммарные выигрыши каждого отдельного игрока, называется «дележом»:

$$\mathbf{\Pi} = (\Pi^1, \Pi^2, \ldots, \Pi^n), \tag{6.4.6}$$

где Π^i — выигрыш i-го игрока ($i = 1, 2, \ldots, n$). Примером дележа для игры, изображенной на рис. 6.11, является вектор (0,3; 0,2; 0,5), т. е. игрок 1 получает 0,3, игрок 2 получает 0,2, а игрок 3 — 0,5. Предположим, что если мы учтем всех игроков и все платежи, то величина суммарного выигрыша игроков будет равна выигрышу большой коалиции, включающей всех игроков, т. е.

$$v(N) = \sum_{i \in N} \Pi^i = \sum_{i=1}^{n} \Pi^i. \tag{6.4.7}$$

Это допущение называется условием *групповой рациональности*. Вполне обосновано также предположение, что, участвуя в коалиции, каждый игрок получает по меньшей мере столько, сколько он мог бы получить, действуя независимо, т. е.

$$\Pi^i \geqslant v(\{i\}) \text{ при любом } i \in N. \tag{6.4.8}$$

Это допущение называется условием *индивидуальной рациональности*. Указанные предположения ограничивают число возможных дележей. Так, например, в играх, представленных в нормализованной форме, единственными приемлемыми дележами являются векторы с неотрицательными компонентами, сумма которых равна единице. Однако и при таких ограничениях множество дележей остается чрезвычайно большим. Поэтому, для того чтобы еще дополнительно сузить это множество, приходится вводить какой-либо критерий допустимости или доминирования на множестве дележей.

Одним из слабых критериев доминирования на множестве дележей является критерий, называемый решением по фон Нейману — Моргенштерну. Множество игроков называется *эффективным* при данном дележе, если их общий выигрыш после объединения в коалицию будет по меньшей мере равен сумме выигрышей, получаемых каждым игроком в отдельности. Следовательно, коалиция S является эффективной при дележе $\Pi = (\Pi^1, \ldots, \Pi^n)$, если

$$v(S) \geqslant \sum_{i \in S} \Pi^i. \tag{6.4.9}$$

В качестве примера рассмотрим игру, изображенную на рис. 6.11. В этой игре множество, состоящее из игрока 2 и игрока 3, является эффективным при дележе (0,95; 0; 0,05). Действительно, если они образуют коалицию, то их общий выигрыш составит 0,2, а это больше того, что можно получить согласно данному дележу. Дележ $\Pi_1 = (\Pi_1^1, \Pi_1^2, \ldots, \Pi_1^n)$ *доминирует* над дележом $\Pi_2 = (\Pi_2^1, \Pi_2^2, \ldots, \Pi_2^n)$, если существует такая коалиция игроков, эффективная при Π_1, что каждый из игроков, вступивших в коалицию, получает при Π_1 больше, чем при Π_2. Иначе говоря, имеется некоторая коалиция S, такая, что

$$v(S) \geqslant \sum_{\text{все } i \in S} \Pi_1^i, \tag{6.4.10}$$

причем каждый член этой коалиции получает при Π_1 больше, чем при Π_2.

$$\Pi_1^i > \Pi_2^i \quad \text{при всех } i \in S. \tag{6.4.11}$$

Так, например, в игре, изображенной на рис. 6.11, дележ $\Pi_1 = (0{,}1;\ 0{,}8;\ 0{,}1)$ доминирует над $\Pi_2 = (0{,}05;\ 0{,}9;\ 0{,}05)$. Действительно, коалиция (1,3) является эффективной при Π_1, и оба игрока 1 и 3 получают при Π_1 больше, чем при Π_2. Если удастся воспрепятствовать независимым действиям игроков, то возможность образования коалиции (1,3) служит гарантией того, что дележ (0,05; 0,9; 0,05) может никогда не использоваться в игре. *Решением игры по фон Нейману и Моргенштерну* называется множество дележей со следующими свойствами: ни один из дележей этого множества не доминирует над другим дележом из того же множества; для любого дележа, не входящего в множество, существует доминирующий дележ, принадлежащий данному множеству. Этот слабый критерий доминирования обычно несколько сужает множество дележей, однако он не приводит, как правило, к множеству, состоящему из одного дележа. В действительности, решение фон Неймана — Моргенштерна часто содержит бесконечное число дележей. В игре более чем с двумя участниками даже и число решений фон Неймана — Моргенштерна (т. е. число множеств дележей, каждое из которых является решением фон Неймана — Моргенштерна) может быть либо очень большим, либо бесконечным. Кроме того, существует ряд примеров игр, которые не обладают решениями фон Неймана — Моргенштерна [17].

Более сильный критерий доминирования на множестве дележей можно задать с помощью понятия «ядра» игры. Ядро — это некоторое подмножество каждого решения фон Неймана — Моргенштерна (если такие решения существуют). Число дележей, входящих в ядро, значительно меньше, чем в решении фон Неймана — Моргенштерна, поскольку дележи, входящие в ядро, должны удовлетворять следующему условию: каждая из коалиций при данном дележе получает по меньшей мере столько, сколько могли бы получить в сумме входящие в нее игроки, действуя самостоятельно. *Ядром* называется множество всех недоминируемых дележей, т. е. таких дележей $\Pi = (\Pi^1, \ldots, \Pi^n)$, которые удовлетворяют условию

$$\sum_{i \in S} \Pi^i \geqslant v(S) \text{ для любого подмножества } S \text{ из } N. \tag{6.4.12}$$

Следовательно, множество дележей, входящих в ядро, удовлетворяет условию «коалиционной рациональности». Это условие включает более частные условия «индивидуальной рациональности» (когда рассматриваются подмножества, состоящие из отдельных игроков), «групповой рациональности» (когда подмножеством является большая коалиция, включающая всех игроков) и условие рациональности любой коалиции промежуточного размера. Ядро описанной на рис. 6.11 игры трех участников показано в геометрической форме на рис. 6.12. Изображенный на рисунке равносторонний треугольник является границей симплекса в пространстве E^3, т. е. границей множества дележей (Π^1, Π^2, Π^3) — векторов трехмерного пространства, — таких, что

$$\Pi^i \geqslant 0, \quad i = 1,\ 2,\ 3,$$
$$\Pi^1 + \Pi^2 + \Pi^3 = 1. \tag{6.4.13}$$

Вершины треугольника соответствуют таким дележам, при которых один из игроков выигрывает всю сумму. Заштрихованная область треугольника — это ядро игры. Представляется вполне разумным следующее предположение: если игра имеет ядро, то все выбираемые дележи должны принадлежать ядру. Это означает, что игроки учитывают все возможные коалиции. Однако, к сожалению, многие игры не имеют ядра (ядро является пустым мно-

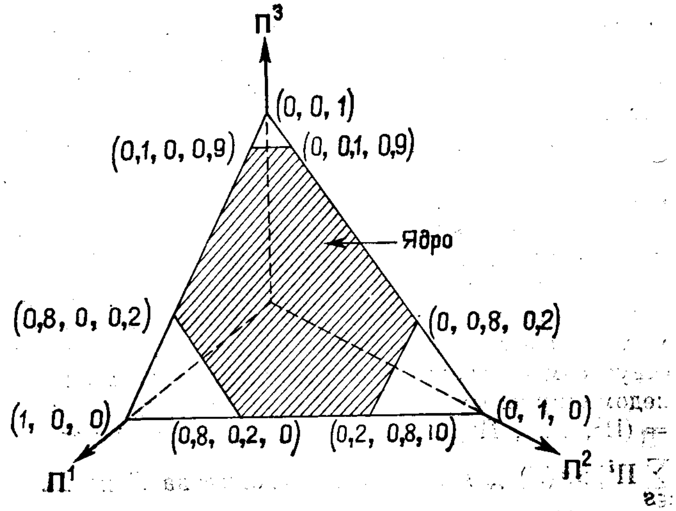

Рис. 6.12. Ядро игры, описанной на рис. 6.11.

жеством), т. е. не существует дележей, удовлетворяющих условию коалиционной рациональности для какой-бы то ни было коалиции. Например, если бы в показанной на рис. 6.11 игре трех участников все коалиции из двух игроков получали бы 0,8, то ядро было бы пустым.

Число дележей, входящих в ядро, как правило, либо равно нулю (т. е. ядро пустое), либо их много (как, например, на рис. 6.12). Ядра, состоящие из единственного дележа, встречаются очень нечасто. Однако в играх с *ценой Шепли* ядро всегда состоит из одного дележа. Ценой Шепли называется дележ, величина платежей в котором зависит от «силы» каждого игрока. Последняя учитывается, исходя из значения дополнительного выигрыша, который может получить коалиция, если данный игрок войдет в нее [18, 19]. Так, например, третий игрок в игре, описанной на рис. 6.11, обладает большей силой, чем остальные, и поэтому должен получить больше, чем они: две коалиции, состоящие из двух игроков и включающие игрока 3, получают 0,2, тогда как коалиция без этого игрока получает 0,1. Предположим, что каждый игрок получает выигрыш, равный средней величине своих вкладов во все те коалиции, куда он мог бы вступить. Выигрыш i-го игрока равен средней взвешенной из $v(S \cup \{i\}) - v(S)$, где

S — это любое подмножество игроков, не содержащее игрока i, а $S \cup \{i\}$ то же самое подмножество, включающее игрока i. Средняя взвешенная равна платежу

$$\Pi^i = \sum_{\text{все } S \subset N} \gamma_n(S)\,[v(S \cup \{i\}) - v(S)], \qquad (6.4.14)$$

где взвешивающие множители $\gamma_n(S)$ равны

$$\gamma_n(S) = \frac{s!\,(n-s-1)!}{n!}, \qquad (6.4.15)$$

а s — это число игроков в S. Выбор именно таких взвешивающих множителей обусловлен следующими обстоятельствами: коалиция из n участников может быть образована $n!$ различными способами; существует $s!$ различных способов организации для s игроков, входящих в коалицию S до того, как к ней присоединяется игрок i; игроки, не входящие в расширенную коалицию, число которых равно $n - s - 1$, могут быть организованы $(n - s - 1)!$ различными способами. Следовательно, если предположить, что все $n!$ способов формирования коалиций, состоящих из n игроков, равновероятны, то $\gamma_n(S)$ представляет собой не что иное, как вероятность присоединения игрока i к коалиции S. В игре, описанной на рис. 6.11, каждому игроку предоставляется четыре возможности. Для игрока 1 эти возможности следующие:

$$\begin{aligned} v(\{1\}) - v(\phi) &= 0 \\ v(\{1, 2\}) - v(\{2\}) &= 0{,}1 \\ v(\{1, 3\}) - v(\{3\}) &= 0{,}2 \\ v(\{1, 2, 3\}) - v(\{2, 3\}) &= 0{,}8. \end{aligned} \qquad (6.4.16)$$

Веса, соответствующие каждому из этих четырех случаев, таковы: $^2/_6$, $^1/_6$, $^1/_6$ и $^2/_6$. Следовательно, выигрыш игрока 3 составит

$$\Pi^3 = \left(\frac{2}{6}\right) 0 + \frac{1}{6}\cdot(0,\,1) + \frac{1}{6}\cdot(0,\,2) + \frac{2}{6}\cdot(0,\,8) = \frac{19}{60}. \qquad (6.4.17)$$

Из аналогичных рассуждений вытекает, что выигрыш игрока 2 равен 19/60, а выигрыш игрока 3 составит 22/60. Итак, в данной игре вектор дележа, соответствующий цене Шепли, равен $\left(\frac{19}{60}, \frac{19}{60}, \frac{22}{60}\right)$.

6.5. ИГРЫ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ИГРОКОВ

Весьма интересную и важную задачу теории игр n лиц составляет исследование случая, когда число игроков неограниченно возрастает [1]. При некоторых предположениях относительно игры и характера увеличения числа игроков выявлен примечательный результат, а именно, что при многих из указанных в предыдущих разделах принципах решения игры получается одно и то же решение. В игре с бесконечным числом игроков всегда существует точка равновесия, причем и множество точек равновесия, и ядро, а также цена Шепли сходятся к этой точке равновесия при неограниченном возрастании n. Этот результат и в самом деле замечательный, поскольку все указанные способы решения основаны на совершенно разных принципах. Так, например, точки равновесия в общем случае не являются точками, оптимальными по Парето. Однако, если число игроков неограниченно возрастает, то точки равновесия перемещаются на поверхность, образованную точками, оптимальными по Парето. С другой стороны, ядро можно рассматривать как область на поверхности, оптимальной по Парето, которая стягивается в одну точку или в некоторое множество точек, когда число игроков неограниченно возрастает. Наконец, цена Шепли не всегда принадлежит ядру, однако она сходится к тому же пределу, что и ядро. Таким образом, хотя в играх с конечным числом игроков существует много различных подходов к понятию решения игры, однако в играх с бесконечным числом игроков существует лишь одно решение (это не значит, что оно всегда состоит из одной точки). Сказанное не относится к простейшему случаю — игре двух участников с нулевой суммой, который имеет единственно приемлемое решение — минимаксное. Таким образом, теория игр обеспечивает удовлетворительный анализ для игр с одним или с двумя игроками, а также для игр с бесконечным числом игроков, однако она не указывает какого-либо одного универсального способа анализа игр с конечным числом игроков, большим или равным трем. В этом отношении теорию игр можно сравнить с механикой, которая дает полное решение задачи одного тела и задачи двух тел, а также с помощью статистической механики обеспечивает решение задач с числом тел порядка 10^{23} и более. Однако с помощью механики в настоящее время нельзя исчерпывающим образом проанализировать задачу, если число тел лежит в промежутке между указанными границами (например, в случае знаменитой задачи трех тел).

[1] См. [20, 21, 22, 23]. См. также раздел 10.2.

ЗАДАЧИ

6-А. Найти решения следующих игр двух участников с нулевой суммой:

1. $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 15 & 0 & -2 \\ 0 & -15 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 8 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, $a > b > c$.

6-Б. Найти решение следующей игры с нулевой суммой: игроки 1 и 2 независимо друг от друга выбирают одно из чисел 1, 2, 3. Если эти числа оказываются равными, то первый игрок выплачивает второму сумму, равную 1. Если же эти числа не равны, то игрок 2 выплачивает игроку 1 сумму, равную тому числу, которое выбрал первый игрок.

6-В. На рис. 6.1 представлен в развернутой форме упрощенный вариант игры двух лиц в покер. Укажите нормальную форму игры и найдите решение. Зависит ли решение от величины ставки? Зависит ли решение от того, на какую сумму можно увеличивать ставку?

6-Г. Игра двух участников с нулевой суммой называется *справедливой*, если цена игры равна нулю.

1. Показать, что симметричная игра, т. е. игра с кососимметрической платежной матрицей ($\mathbf{\Pi} = -\mathbf{\Pi}'$), является справедливой и что оптимальные векторы вероятностей совпадают с точностью до операции транспонирования векторов.
2. Построить пример несимметричной не полностью определенной справедливой игры.
3. Построить пример несимметричной вполне определенной справедливой игры.

6-Д. Доказать, что игра двух лиц с нулевой суммой обладает следующими свойствами:

1. Седловая точка может быть не единственной; цена игры единственна.
2. Цена игры является неубывающей непрерывной функцией элементов платежной матрицы.

6-Е. Показать, что в не полностью определенных играх двух участников с нулевой суммой выполняется следующее:

1. Если противник использует свою оптимальную смешанную стратегию, то никакая чистая стратегия не может дать большего выигрыша, чем оптимальная смешанная стратегия.
2. Если противник использует оптимальную стратегию, то любая чистая стратегия, которая входит с ненулевой вероятностью в некоторую оптимальную смешанную стратегию, приводит к выигрышу, равному цене игры, тогда как выигрыш при любой чистой стратегии, входящей в любую смешанную стратегию с нулевой вероятностью, меньше цены игры.
3. Любая доминирующая чистая стратегия используется в оптимальных смешанных стратегиях с нулевой вероятностью (см. 6-М).
4. Любая выпуклая линейная комбинация двух оптимальных смешанных стратегий также является оптимальной смешанной стратегией.

6-Ж. В некоторых играх двух участников с нулевой суммой допустимы любые монотонные преобразования платежей:

$$\Pi'_{ij} = \phi\,(\Pi_{ij}), \quad \phi' > 0.$$

В некоторых играх двух участников с нулевой суммой допустимы любые монотонные линейные преобразования

$$\Pi'_{ij} = a\Pi_{ij} + b, \quad a > 0.$$

1. Показать, что во вполне определенных играх оптимальные (чистые) стратегии не меняются при любых монотонных преобразованиях, а цена игры изменяется согласно этому преобразованию.
2. Показать, что в не полностью определенной игре оптимальные (смешанные) стратегии не меняются при монотонных линейных преобразованиях, а цена игры меняется согласно этому преобразованию.
3. Показать на примере, что монотонное нелинейное преобразование, не меняющее оптимальные чистые стратегии во вполне определенной игре, может привести к изменениям оптимальных смешанных стратегий в не полностью определенных играх.

6-З. Показать, что оптимальные смешанные стратегии $\mathbf{p}^{1*}$ и $\mathbf{p}^{2*}$ для не полностью определенной матричной игры с невырожденной матрицей $\mathbf{\Pi}$ размерности 2×2 имеют следующий вид:

$$\mathbf{p}^{1*} = \frac{1}{V}\,\mathbf{1}\mathbf{\Pi}^{-1}$$

$$\mathbf{p}^{2*} = \frac{1}{V}\,\mathbf{\Pi}^{-1}\mathbf{1}',$$

где $\mathbf{1} = (1, 1)$, а цена игры есть

$$V = \frac{1}{\mathbf{1}\mathbf{\Pi}^{-1}\mathbf{1}'}.$$

Обобщить эти результаты на случай игры с вырожденной матрицей $\mathbf{\Pi}$ размерности 2×2. Найти оптимальные смешанные стратегии в играх с матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

При решении воспользоваться приведенными результатами. Проверить правильность решения, сопоставив его с решением, найденным графическим способом.

6-И. В разделе 6.2 было показано, что из теоремы двойственности теории линейного программирования вытекает теорема о минимаксе. Докажите обратное, что из теоремы о минимаксе следует теорема двойственности. Указание: представьте двойственные задачи линейного программирования, сформулированные в гл. 5, в форме игры двух участников с нулевой суммой, имеющей кососимметрическую платежную матрицу

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} & -\mathbf{b} \\ -\mathbf{A}' & 0 & \mathbf{c}' \\ \mathbf{b}' & -\mathbf{c} & 0 \end{pmatrix}.$$

6-К. В некоторой бесконечной игре двух участников с нулевой суммой игрок 1 выбирает целое число i, игрок 2 — целое число j, а выигрыш игрока 1 равен $i - j$. Игрок 1 применяет смешанную стратегию

$$p_i = \begin{Bmatrix} 1/2i, \text{ если } i = 2^k, \text{ где } k \text{ целое число} \\ 0 \quad \text{в противном случае} \end{Bmatrix}.$$

Показать, что эта смешанная стратегия дает игроку 1 бесконечно большое значение ожидаемого выигрыша при любой чистой стратегии игрока 2.

6-Л. В игре с природой имеется только один игрок, принимающий решение, причем исход игры зависит не только от его решений, но и от «состояния природы» [24]. Платежная матрица в этом случае похожа на матрицу игры, показанной на рис. 6.3, где игрок 1 — это лицо, принимающее одно из m различных возможных решений, а игрок 2 — это «природа», имеющая n различных возможных состояний. При выборе решения могут использоваться несколько различных критериев.

1. *Критерий Лапласа* («принцип недостаточного основания»). Предполагается, что все состояния одинаково вероятны, поэтому следует выбирать такую строку матрицы, которая максимизирует средний выигрыш по строке.

2. *Принцип максимина.* Предполагается, что природа является «злонамеренным» противником, поэтому следует выбирать ту строку матрицы, которая содержит максиминимальный элемент, т. е. наибольший из всех минимальных элементов столбцов.

3. *Принцип максимакса.* Предполагается, что природа — это «доброжелательный» партнер, поэтому следует выбирать строку матрицы с максимаксимальным элементом, т. е. наибольшим из всех максимальных элементов столбцов.

4. *Критерий минимаксного сожаления* (*риска*). Предполагается, что любое решение сопоставляется с тем решением, которое было бы принято, если бы было известно состояние природы. Этот критерий приводит к выбору строки матрицы, содержащей элемент, который минимизирует максимальный риск (сожаление). Риск (сожаление) — это абсолютное значение разности между любым данным платежом и тем платежом, который можно было бы получить, зная состояние природы. Постройте примеры числовых матриц таких игр с природой, в которых все четыре критерия приводят к одному и тому же результату, и таких игр с природой, в которых применение каждого из четырех критериев дает разные результаты.

6-М. Существуют три типа исходов в играх с нулевой суммой, в которых каждый игрок располагает двумя возможными стратегиями:

1. Каждый игрок имеет доминирующую стратегию.
2. Лишь один игрок имеет доминирующую стратегию.
3. Ни один из игроков не располагает доминирующей стратегией.

Одна стратегия *доминирует* над другой, если она дает не меньший выигрыш, чем другая при любых стратегиях противника, и если она дает больший выигрыш при некоторых стратегиях противника. Привести примеры игры различных видов, соответствующих трем типам исходов.

6-Н. Рассмотрим игру, участники которой — мужчина и женщина — решают, пойти ли на соревнование боксеров (первая стратегия) или на демонстрацию мод (вторая стратегия). Мужчина предпочитает соревнование по боксу, а женщина — показ мод, но в любом случае они идут вместе. Платежная матрица имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} (4,\ 1) & (0,\ 0) \\ (0,\ 0) & (1,\ 4) \end{bmatrix}.$$

1. Решить задачу торгов, используя решение кооперативной игры по Нэшу. Будем считать, что точкой угрозы является точка (0, 0).

2. Решить задачу торгов, используя решение по Нэшу, если точкой угрозы является точка максиминных платежей для каждого из игроков. Показать, что это решение совпадает с ценой Шепли для кооперативной игры, в которой

$$v(\phi) = 0, \quad v(N) = 1,$$

v ({мужчина}) и v ({женщина}) — это максиминные значения.

6-О. Ниже перечислен ряд концепций решения игры. Сопоставьте эти концепции на примере двух игр: игры подростков на автомобилях и игры из п. 6-Н.

1. Точка (точки) равновесия.
2. Принцип максимина, т. е. каждый игрок максимизирует свой минимальный выигрыш.
3. Принцип минимакса, т. е. каждый игрок минимизирует максимальный выигрыш своего противника.
4. Принцип максимальной суммы, т. е. максимизируется сумма выигрышей.
5. Принцип максимальной разности, т. е. максимизируется разность между выигрышем данного игрока и выигрышем его противника.

6-П. Рассмотрим некоторую задачу торгов. Два человека могут получить 100 долл., если они придут к соглашению о разделе этих денег. Первый из них обладает суммой W_1 долл.; его функция полезности представляет собой логарифмическую функцию, так что если он получит X долл. из 100, то его выигрыш равен

$$\Pi^1 = \ln(W_1 + X), \; 0 \leqslant X \leqslant 100.$$

Аналогично второй человек обладает суммой W_2 долл. и его выигрыш при получении оставшихся $100 - X$ долл. равен

$$\Pi^2 = \ln(W_2 + 100 - X).$$

1. Предположим, что $W_i \gg 100$, $i = 1, 2$. Как будут разделены деньги при решении по Нэшу? (Указание: $\ln(1 + z) \approx z$, если z — малое число.)

2. Предположим, что $W_1 = 100$, $W_2 \gg 100$. Как будут разделены разыгрываемые 100 долл.? Является ли этот раздел «справедливым»?

6-Р. В игре «третий лишний» участвуют три игрока, которые независимо друг от друга выбирают одну из сторон монеты: либо «орел», либо «решка». Если выбор всех игроков одинаков, то каждому из игроков выплачивается по одному доллару, в противном случае «третий лишний» выплачивает каждому из двух игроков по одному доллару. Найти характеристическую функцию игры.

6-С. Укажите примеры, иллюстрирующие указанные ниже возможности доминирования платежей (имеется в виду понятие доминирования дележей в решении фон Неймана — Моргенштерна).

1. Π_1 доминирует над Π_2, а Π_2 не доминирует над Π_1:
2. Π_1 доминирует над Π_2, а Π_2 доминирует над Π_1.
3. Дележи Π_1 и Π_2 не являются доминирующими друг для друга.

6-Т. Для игры в форме характеристической функции показать, что ядро является подмножеством решения фон Неймана — Моргенштерна.

6-У. Игра называется *игрой с постоянной суммой в форме характеристической функции*, если

$$v(S) + v(N \sim S) = v(N)$$

для всех подмножеств S из N.

1. Показать на примере, что игра может быть игрой с постоянной суммой в форме характеристической функции и в то же время не являться игрой с постоянной суммой в нормальной форме.

2. Показать, что все конечные игры, являющиеся играми с постоянной суммой в нормальной форме, являются также и играми с постоянной суммой в форме характеристической функции.

6-Ф. Некоторая игра трех участников имеет нормализованную характеристическую функцию, в которую входит параметр p — максимальный гарантированный выигрыш всех коалиций из двух игроков. Найти ядро и решения фон Неймана — Моргенштерна при $p = 0$, $p = {}^1/_3$, $p = {}^2/_3$, $p = 1$.

6-Ц. Пусть в некоторой акционерной компании часть акций, а именно простое большинство акций, требуется для сохранения контроля над компанией. По всем акциям выплачиваются одинаковые дивиденды независимо от того, принадлежат ли они контролирующей группе или нет.

Если i-му акционеру принадлежит S_i акций ($i = 1, 2, \ldots, n$), а $m = \sum_{i=1}^{n} S_i$ — общее число акций, то характеристическая функция имеет следующий вид:

$$v(S) = \begin{cases} 0 \text{ при } n_S \leqslant \frac{m}{2}, \\ \frac{n_S}{m} \text{ при } n_S > \frac{m}{2}, \end{cases}$$

где n_s — число акций, контролируемых коалицией S,

$$n_S = \sum_{\text{все } i \in S} S_i.$$

Предположим, что S_i не равны между собой. Показать, что ядро состоит из единственного дележа $(S_1/m, S_2/m, \ldots, S_n/m)$. Дайте интерпретацию этого результата.