ЧАСТЬ II
Статическая оптимизация

Глава 2

Задача математического программирования

Статическая задача рационального ведения хозяйства (рациональной деятельности) связана с распределением ограниченных ресурсов на различные цели в определенный момент времени. В математической форме задача состоит в нахождении значений переменных, максимизирующих заданную функцию и удовлетворяющих системе ограничений. В такой форме задача статической оптимизации часто называется *задачей математического программирования.*

2.1. ФОРМАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При формальной постановке задачи математического программирования основными являются понятия «инструментальных» переменных, *допустимого множества* и *целевой функции.*

Задача заключается в нахождении значений n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые называются здесь «инструментами» [1]. Записанные в виде вектора-столбца

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)', \qquad (2.1.1)$$

[1] Термин «инструменты» заимствован из книги Я. Тинбергена «Теория экономической политики»; он отмечал, что орган, регулирующий народное хозяйство, может пользоваться различными средствами — «инструментами» (процентной ставкой, тарифами и т.п.) — для достижения определенных целей (сокращение безработицы, выравнивание платежного баланса и т. п.). — *Прим. ред.*

они составляют вектор инструментальных переменных в n-мерном евклидовом пространстве E^n [1].

Если вектор инструментальных переменных **x** удовлетворяет ограничениям задачи, он называется *допустимым*, а множество всех допустимых векторов образует множество возможностей X. Допустимое множество является подмножеством E^n. Так как задача заключается в выборе вектора инструментальных переменных из допустимого множества, то в любой нетривиальной задаче оно является непустым (т. е. система ограничений совместна) и содержит по крайней мере две различные точки.

Целевая функция — это краткое математическое изложение цели данной задачи. Обычно она представляет собой действительную непрерывно дифференцируемую функцию вектора инструментальных переменных

$$F = F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{2.1.2}$$

Общая задача математического программирования состоит в выборе вектора инструментальных переменных из множества возможностей, максимизирующего значение целевой функции:

$$\max_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) \quad \text{при условии, что } \mathbf{x} \in X, \tag{2.1.3}$$

где X — подмножество n-мерного евклидова пространства.

Учитывая, что максимизация $F(\mathbf{x})$ эквивалентна максимизации $a + bF(\mathbf{x})$, $b > 0$, или минимизации $a + bF(\mathbf{x})$, $b < 0$, можно сделать вывод, что введение дополнительного слагаемого или положительного множителя в целевую функцию не изменяет задачи, в то время как отрицательный множитель может быть использован для преобразования задачи максимизации в задачу минимизации, и наоборот (например, с помощью умножения $F(\mathbf{x})$ на -1).

Выделяются три основных вида общей задачи математического программирования: классическая задача математического программирования, задача нелинейного программирования и задача линейного программирования.

[1] Определение понятий «вектор-столбец», «транспонирование», «n-мерное евклидово пространство» и т. д. дано в приложении.

В *классической задаче* математического программирования все ограничения представляют собой равенства

$$\begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x}) = g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_1 \\ g_2(\mathbf{x}) = g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_2 \\ \vdots \\ g_m(\mathbf{x}) = g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_m \end{pmatrix}. \tag{2.1.4}$$

Функции $g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x})$ — известные непрерывно дифференцируемые функции, называемые функциями ограничений; параметры $b_1, b_2, \ldots, b_m$ — заданные действительные числа, называемые *константами ограничений*. В векторной форме система ограничений записывается в виде

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}, \tag{2.1.5}$$

где $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{b}$ m-мерные векторы-столбцы

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{2.1.6}$$

Задача классического программирования заключается в максимизации целевой функции при заданных ограничениях

$$\max_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) \quad \text{при условии, что} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \tag{2.1.7}$$

В *нелинейном программировании* система ограничений состоит из условий двух типов:

условий неотрицательности

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0, \tag{2.1.8}$$

и ограничений в виде неравенств

$$\begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x}) = g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant b_1 \\ g_2(\mathbf{x}) = g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant b_2 \\ \vdots \\ g_m(\mathbf{x}) = g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant b_m \end{pmatrix}. \tag{2.1.9}$$

Запишем ограничения в векторной форме

$$\mathbf{x} \geqslant 0, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leqslant \mathbf{b}. \tag{2.1.10}$$

В этой записи предполагается, что функции ограничений $g_1(\mathbf{x})$, $g_2(\mathbf{x})$, ... $g_m(\mathbf{x})$ непрерывно дифференцируемые, константы ограничений $b_1, b_2, \ldots, b_m$, как и раньше, заданные действительные числа, а $\mathbf{0}$ — вектор-столбец, состоящий из нулей.

Задача нелинейного программирования заключается в нахождении неотрицательных значений переменных, удовлетворяющих условиям (2.1.9) и максимизирующих заданную функцию

$$\max_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) \text{ при условии, что } \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leqslant \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}. \quad (2.1.11)$$

В *линейном программировании* целевая функция является линейной формой

$$F(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \mathbf{cx}, \quad (2.1.12)$$

где $\mathbf{c}$ — заданный вектор-строка констант

$$\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n), \quad (2.1.13)$$

и имеются ограничения двух типов:

ограничения в виде неравенств

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \end{pmatrix}, \quad (2.1.14)$$

и условия неотрицательности

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0. \quad (2.1.15)$$

В векторной форме ограничения имеют вид

$$\mathbf{Ax} \leqslant \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, \quad (2.1.16)$$

где $\mathbf{A}$ — заданная матрица размерности $m \times n$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (2.1.17)$$

Таким образом, задача линейного программирования заключается в нахождении неотрицательных значений переменных, удовлетворяющих ограничениям (2.1.14) и максимизирующих заданную линейную форму

$$\max_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{cx} \text{ при условии, что } \mathbf{Ax} \leqslant \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}. \quad (2.1.18)$$

Следовательно, задача линейного программирования является частным случаем задачи нелинейного программирования, в которой целевая функция и функции ограничений линейны.

2.2. ТИПЫ МАКСИМУМОВ, ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА И ТЕОРЕМА О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ГЛОБАЛЬНОГО МАКСИМУМА

В общей задаче математического программирования вектор инструментальных переменных $\mathbf{x}^*$ является точкой *глобального максимума* (или решением), если он принадлежит допустимому множеству и целевая функция принимает на этом векторе значение не меньшее, чем в любой другой допустимой точке

$$\mathbf{x}^* \in X \text{ и } F(\mathbf{x}^*) \geqslant F(\mathbf{x}) \text{ для всех } \mathbf{x} \in X. \quad (2.2.1)$$

Будем считать *глобальный максимум строгим* (сильным), если значение целевой функции при $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ строго больше любого другого значения функции на допустимом множестве, т. е.

$$F(\mathbf{x}^*) > F(\mathbf{x}) \text{ для всех } \mathbf{x} \in X,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*. \quad (2.2.2)$$

Очевидно, что строгий глобальный максимум всегда единственен, так как если мы предположим противное и допустим, что $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{x}^{**}$ являются различными точками сильного глобального максимума, то из этого будет следовать, что $F(\mathbf{x}^*) > F(\mathbf{x}^{**})$ и $F(\mathbf{x}^{**}) > F(\mathbf{x}^*)$, а эти неравенства одновременно выполняться не могут.

Фундаментальная теорема математического программирования — теорема Вейерштрасса — формулирует условия существования глобального максимума.

Теорема Вейерштрасса. Пусть допустимое множество X является компактным (т. е. ограниченным и замкнутым) и непустым. Тогда непрерывная целевая функция F (x), определенная на этом множестве, достигает глобального максимума на внутренней или граничной точке множества X[1].

Доказательство этого утверждения следует из того факта, что образ непрерывной функции, определенной на компактном множестве, тоже является компактным. Тогда мы имеем множество действительных чисел, удовлетворяющих условию

$$F(X) = \{z \in E \mid z = F(\mathrm{x}) \text{ для } \mathrm{x} \in X\}, \quad (2.2.3)$$

которое является компактным. Всякое компактное множество действительных чисел имеет верхнюю грань. Таким образом, если F^* является верхней гранью $F(X)$, то существует $\mathrm{x}^* \in X$, удовлетворяющее условию $F(\mathrm{x}^*) = F^*$, а так как $F(\mathrm{x}) < F(\mathrm{x}^*)$ для всех $\mathrm{x} \in X$, то точка x^* является глобальным максимумом.

Геометрическая иллюстрация теоремы Вейерштрасса в одномерном случае приведена на рис. 2.1. В этом случае вектор инструментальных переменных сводится к действительному числу x. Допустимое множество представляет собой интервал на горизонтальной оси x, а множество значений функции $F(X)$ — на вертикальной оси (включая граничные точки интервалов). В рассмотренных случаях внутреннее решение x^* является точкой глобального, но не строгого, а граничное решение x^{***} является точкой строгого глобального максимума.

Примером одномерной задачи, не имеющей решения, может служить задача максимизации функции $F(x) = x^2$ при условии $x \geqslant 0$. Здесь решения нет, так как целевая функция возрастает с увеличением x, а верхнего предела по переменной x нет (допустимое множество не ограничено). Еще одна задача того же типа — максимизация функции $F(x) = 10x$ при условии $0 \leqslant x < 1$. Здесь нет решения, так как целевая функция возрастает с увеличением x, а верхняя грань в точке $x = 1$ не достигается (допустимое множество не замкнуто). Однако надо отметить, что условия теоремы Вейерштрасса являются достаточными, но не необходимыми. Например, задача максимизации функции $F(x) = x^3$ при условии $0 < x \leqslant 1$

[1] Допущения на F (x) в теореме Вейерштрасса могут быть ослаблены и заменены условием, что F (x) ограничена сверху на X.

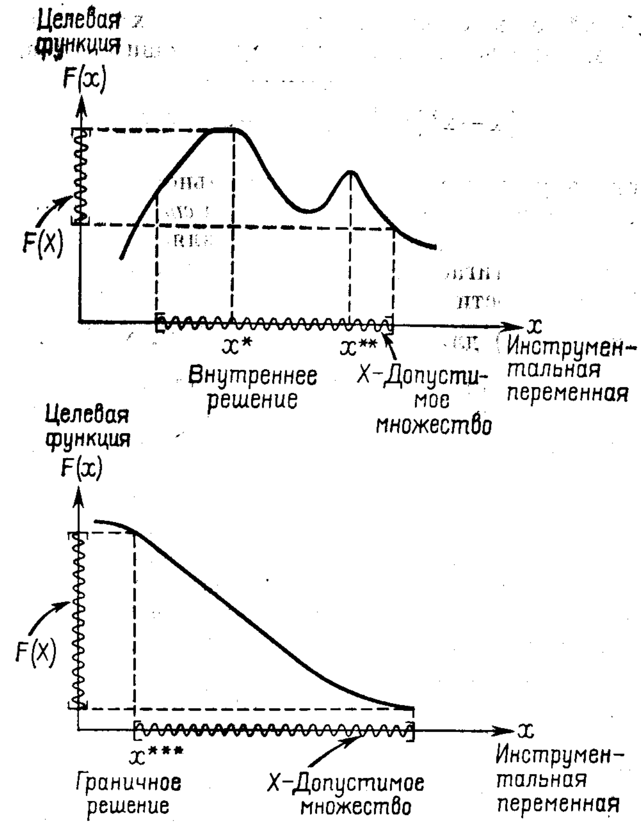


Рис. 2.1. Внутреннее и граничное решения в одномерном случае.

(или $x \leqslant 1$) имеет решение в точке $x = 1$, хотя допустимое множество не является компактным.

Вектор инструментальных переменных x^* есть точка *локального максимума*, если он принадлежит допустимому множеству и на нем достигается значение целевой функции, большее или равное значениям функции в некоторой малой окрестности этого вектора

$$\mathrm{x}^* \in X \text{ и } F(\mathrm{x}^*) \geqslant F(\mathrm{x}) \text{ для всех } \mathrm{x} \in X \cap N_\varepsilon(\mathrm{x}^*), \quad (2.2.4)$$

где N_ε $\mathbf{x}^*$ есть ε-окрестность вектора $\mathbf{x}^*$, в данном случае множество точек $\mathbf{x}$, удовлетворяющих условию

$$|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*|=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j-x_j^*)^2}<\varepsilon$$

для сколь угодно малого положительного числа ε.

Локальный максимум в $\mathbf{x}^*$ является *строгим*, если значение целевой функции в точке $\mathbf{x}^*$ является наибольшим значением, достигаемым целевой функцией в некоторой малой окрестности

$$F(\mathbf{x}^*)>F(\mathbf{x}) \text{ для всех } \mathbf{x}\in X\cap N_\varepsilon(\mathbf{x}^*),\ \mathbf{x}\neq\mathbf{x}^*. \quad (2.2.5)$$

Очевидно, глобальный максимум является локальным; обратное утверждение неверно, так как могут существовать другие локальные максимумы, на которых целевая функция принимает большие значения. Например, на рис. 2.1 в случае внутреннего решения точки x^* и x^{**} являются точками локального максимума, а точка x^{**} — строго локального, но не глобального максимума.

Второй основной теоремой математического программирования является *«локально-глобальная» теорема*, дающая достаточные условия, при которых локальный максимум является глобальным.

Теорема (*достаточные условия глобального максимума*). Пусть допустимое множество не пусто и является компактным и выпуклым, а непрерывная функция $F(\mathbf{x})$ вогнута на X. Тогда 1) локальный максимум является глобальным, 2) множество точек, на котором достигается максимум, выпукло [1]. Если предположить, что функция $F(\mathbf{x})$ — строго вогнута, то решение единственно, т. е. существует единственный глобальный максимум. Иллюстрация этого случая приведена на рис. 2.2. Так как допустимое множество выпукло, то любая точка, лежащая между двумя допустимыми точками, также является допустимой, а из того факта, что целевая функция строго вогнута, следует, что хорда, соединяющая две точки кривой, лежит ниже кривой. Таким образом, точки из допустимого множества, лежащие справа от строгого локального максимума x^* (например, x^2), не могут быть глобальными максимумами, потому что, соединив точки x^* и x^2, как показано на рис. 2.2, мы увидим, что между ними существуют допустимые точки (например, x^1), для которых $F(x^1) > F(x^2)$. Аналогичные условия выполняются для допустимых точек, лежащих слева от x^*. Поэтому строгий локальный максимум в точке x^* является единственным строгим глобальным максимумом.

[1] Допущения на $F(\mathbf{x})$ в теореме о достаточных условиях глобального максимума могут быть ослаблены и заменены требованием квазивогнутости функции на X.

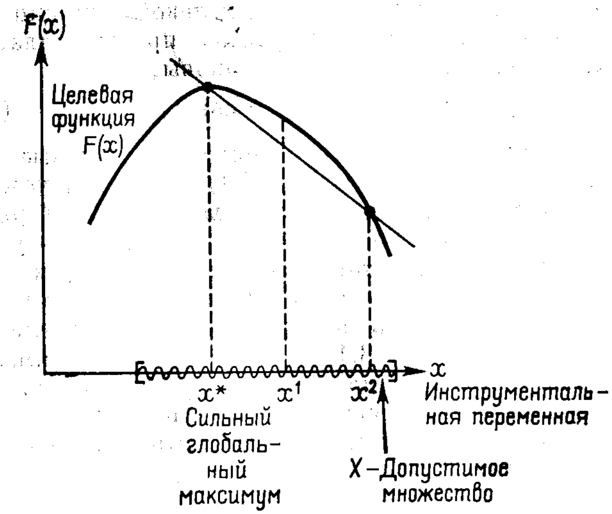


Рис. 2.2. По теореме о достаточных условиях глобального максимума, строгий локальный максимум в точке x^* является строгим глобальным максимумом, так как X выпукло, а $F(x)$ строго вогнута.

2.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ КОММЕНТАРИЙ

В одномерном случае, $n = 1$, задаче математического программирования можно дать наглядную геометрическую иллюстрацию. Допустимое множество и целевая функция изображаются на плоскости, как показано на рис. 2.1 и 2.2. При $n = 2$ мы непосредственно определяем только допустимое множество, откладывая инструментальные переменные по осям x_1 и x_2, а целевую функцию $F(\mathbf{x})$ определяем через *линии уровня* и *направление скорейшего роста*.

Поверхностью (линией) уровня целевой функции называется множество точек евклидова пространства, для которых значения функции одинаковы, т. е.

$$\{\mathbf{x} \in E^n \mid F(\mathbf{x}) = \text{const}\}, \qquad (2.3.1)$$

причем различные константы порождают различные линии уровня. Изменяя константы в (2.3.1), получим *множество линий уровня*, которое называется *картой линий уровня.* Хорошо известные примеры линий уровня — уровни одинаковых высот на топографической карте и линии одинакового барометрического давления на карте погоды.

Направление, вдоль которого скорость увеличения целевой функции (в (2.3.1) — постоянной) максимальна, называется *«предпочтительным» направлением*, или направлением наискорейшего роста. Оно задается вектором, который составлен из первых частных производных целевой функции

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{x}),\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(\mathbf{x}),\ \ldots,\ \frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right). \qquad (2.3.2)$$

Вектор частных производных, называемый вектором-гра-

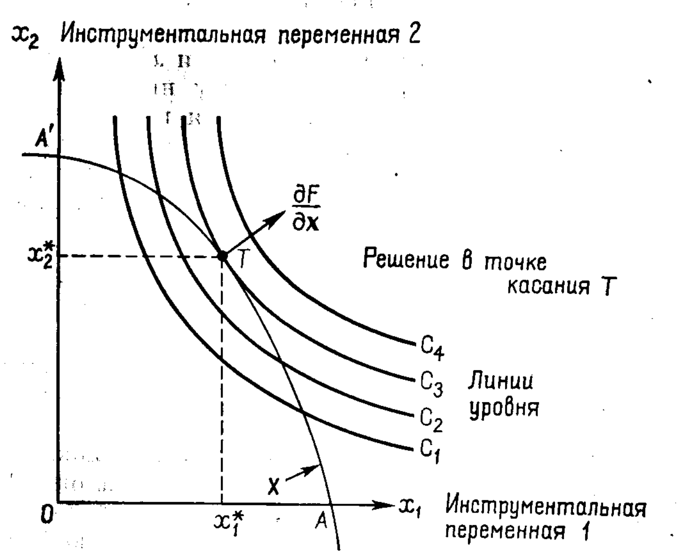


Рис. 2.3. Классическое программирование: решение в точке касания.

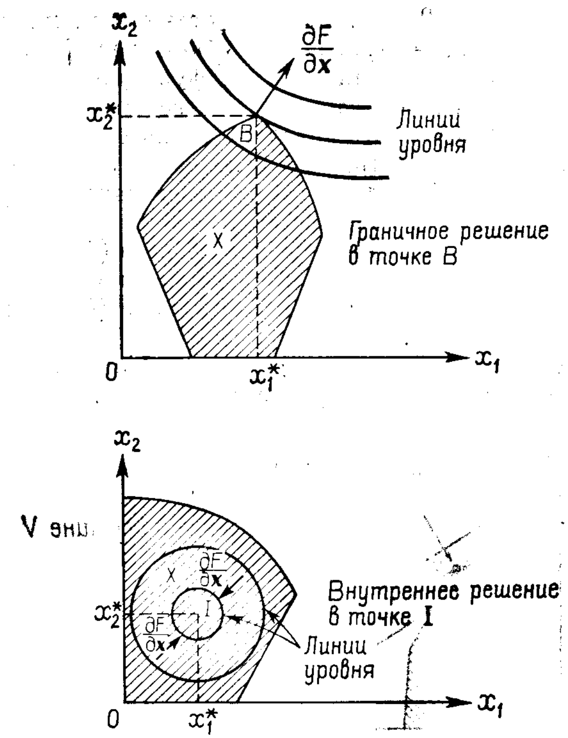


Рис. 2.4. Нелинейное программирование: граничное и внутреннее решения.

диентом, определяет направление скорейшего возрастания функции[1] $F(\mathbf{x})$.

Геометрически в задаче математического программирования мы ищем такую точку или набор точек из допустимого множества, на которой достигается самая верхняя линия уровня, расположенная дальше остальных в направлении скорейшего роста. Этот способ используется при иллюстрации многих задач статической оптимизации в двумерном случае.

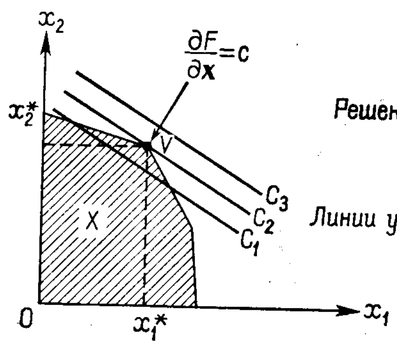
На рис. 2.3 показано решение задачи математического программирования (2.1.7), в которой константы линии

[1] Заметим, что производная скаляра F по вектору-столбцу $\mathbf{x}$ составляет вектор-строку $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}$. Это допущение используется во всей книге (см. приложение Б, раздел Б.9).

уровня C_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) возрастают в направлении скорейшего роста, а кривая AA' образует допустимое множество. В случае если целевая функция и функции ограничений нелинейны, то при соответствующих предположениях о выпуклости задача классического программирования имеет единственное решение в точке касания T, в которой наклон линии уровня равен наклону кривой допустимых значений переменных.

В задаче нелинейного программирования (2.1.11) могут существовать два типа решений, как показано на рис. 2.4. Решение может находиться как на границе (B), так и во внутренней точке (I).

Наконец, рис. 2.5 иллюстрирует два возможных решения задачи линейного программирования. Линейная



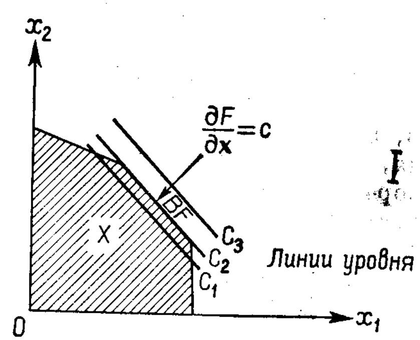


Рис. 2.5. Линейное программирование: решение в вершине V и на ограничивающем отрезке. I — Решение на грани BF.

целевая функция порождает прямые линии уровня C_k, а линейные ограничения в виде неравенств и условия неотрицательности образуют допустимое множество, ограниченное отрезками прямых (на рис. 2.5 допустимое множество заштриховано). Так как целевая функция линейна, то $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{c}$ и направление, в котором целевая функция возрастает с максимальной скоростью, везде одинаково. Поэтому в данном случае не может быть внутреннего решения; оно может находиться либо в вершине V, либо решением является весь отрезок (BF), ограничивающий допустимое множество.