ЧАСТЬ V
Применение динамической оптимизации

Глава 16

Оптимальный экономический рост

В любой экономике обязательно производится выбор между обеспечением текущего спроса (потребление) и обеспечением будущего спроса (капитальные вложения). Несмотря на то что более высокий уровень потребления всегда предпочтительнее более низкого, тем не менее более высокий уровень потребления означает меньшие капитальные вложения, что влечет за собой соответственно уменьшение объема выпуска в будущем и как следствие понижение уровня будущего потребления. Поэтому возникает задача выбора той или иной политики в области потребления. Одну из крайностей представляет политика потребления, при которой насколько возможно полно удовлетворяются текущие потребности, даже если это грозит катастрофой в будущем из-за понижения уровня потребления: «Живи сегодня, а завтра мы умрем». Другой крайностью является политика потребления, при которой стремятся ограничить текущее потребление, с тем чтобы увеличить капитал и уровень потребления в будущем.

Множество функций времени (траекторий) для потребления, капиталообразования и выпуска продукции возникает при выборе между потреблением и накоплением капитала. Из этого множества возможных траекторий роста экономики необходимо выбрать одну, но предварительно следует получить оценку соотношения текущего и будущего потребления. Как только такая оценка выполнена, тотчас возникает задача выбора оптимальной траектории роста, т. е. задача об *оптимальном экономическом росте* [1].

---

[1] Основная литература по оптимальному экономическому росту: [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Первым исследовал эту задачу Рамсей [7].

16.1. НЕОКЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РОСТА

Неоклассическая модель роста описывает экономический рост в агрегированной замкнутой экономике [8, 9]. *Агрегированная* экономика означает, что во время t производится единственный однородный продукт, выпуск которого составляет $Y(t)$. При этом в процессе производства используются два однородных фактора: труд $L(t)$ и капитал $K(t)$ (предполагается, что t изменяется непрерывно). *Замкнутость* здесь означает, что ни выпуск, ни затраты не импортируются и не экспортируются: весь выпуск или потребляется, или инвестируется в экономику[1]. Если обозначить через $C(t)$ потребление во время t, а через $I(t)$ капиталовложения во время t, то, согласно тождественному *равенству дохода и расходов*,

$$Y(t) = C(t) + I(t). \tag{16.1.1}$$

Это тождество показывает, что выпуск (валовой национальный продукт) может идти либо на потребление, либо на инвестиции.

Инвестиции идут в свою очередь и на увеличение размера наличного капитала, и на замещение изношенного капитала. Пусть $K(t)$ — размер капитала в момент времени t, тогда капитальные вложения измеряются скоростью изменения наличного капитала $\dot{K}(t) = dK(t)/dt$. Предположим, что амортизация наличного капитала пропорциональна его величине и равна μ (норма амортизации), т. е. в момент времени t необходимо заменить $\mu K(t)$ амортизированного капитала. Предположим также, что выполняется следующее *тождество для валовых инвестиций*:

$$I(t) = \dot{K}(t) + \mu K(t). \tag{16.1.2}$$

Таким образом, чистые капитальные вложения составляют ту часть инвестиций, которая не идет на замещение изношенного капитала.

Размеры выпуска определяются агрегированной *производственной функцией*, которая характеризует технически эффективные возможности производства в зависимости от величины капитала и труда[1].

[1] В следующих разделах описаны обобщения для случая двухпродуктового выпуска, неоднородных капитальных благ, дискретного времени и открытой экономики.

$$Y = F(K, L). \tag{16.1.3}$$

Предполагается, что производственная функция инвариантна во времени и дважды дифференцируема, причем при любых положительных затратах факторов имеют место следующие соотношения:

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0, \tag{16.1.4}$$

$$\lim_{K\to 0} \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = \infty, \quad \lim_{K\to\infty} \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = 0, \qquad \lim_{L\to 0} \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = \infty, \quad \lim_{L\to\infty} \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = 0, \tag{16.1.5}$$

так что оба предельных продукта принимают вначале бесконечно большие значения, а затем постепенно уменьшаются до нуля. Предполагается также, что отдача от масштаба производства постоянна, т. е. для любого положительного числа α

$$F(\alpha K, \alpha L) = \alpha F(K, L) = \alpha Y. \tag{16.1.6}$$

В частности, выбирая $\alpha = 1/L$, получим

$$\frac{Y}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = f\left(\frac{K}{L}\right). \tag{16.1.7}$$

Функция $f(\cdot)$ определяет выпуск продукции на одного рабочего (производительность труда) в зависимости от величины капитала на одного рабочего (капиталовооруженность)[2].

Обозначая все величины на одного рабочего строчными буквами, можно представить (16.1.7) в виде

$$y = f(k), \tag{16.1.8}$$

где $y(t)$ — выпуск продукции на одного рабочего, а $k(t)$ — величина капитала на одного рабочего:

$$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)}, \quad k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}. \tag{16.1.9}$$

[1] Производственные функции рассматриваются более подробно в разделе 8.1, там же приводится литература по этому вопросу.

[2] В советской литературе этот показатель обычно называется фондовооруженностью.— *Прим. ред.*

Согласно предположениям (16.1.4) и (16.1.5),

$$f'(k)=\frac{df(k)}{dk}>0,\quad f''(k)=\frac{d^2f(k)}{dk^2}<0, \text{ для всех } k>0,$$

$$\lim_{k\to 0} f'(k)=\infty,\quad \lim_{k\to\infty} f'(k)=0. \qquad (16.1.10)$$

Итак, производственная функция на одного рабочего является строго вогнутой монотонно возрастающей функцией с наклоном касательной, равным бесконечности при $k=0$ и равным нулю при $k=+\infty$.

Переменные и уравнения, введенные ранее, можно переписать, используя величины в расчете на одного рабочего. Пусть $c(t)$ — потребление на одного рабочего, а $i(t)$ — капитальные вложения, приходящиеся на одного рабочего, соответствующие времени t:

$$c(t)=\frac{C(t)}{L(t)},\quad i(t)=\frac{I(t)}{L(t)}. \qquad (16.1.11)$$

Тогда тождество дохода и расходов (16.1.1) можно переписать как

$$y(t)=c(t)+i(t), \qquad (16.1.12)$$

а тождество для валовых инвестиций (16.1.2) как

$$i(t)=\frac{\dot K(t)}{L(t)}+\mu k(t). \qquad (16.1.13)$$

Скорость изменения величины капиталовооруженности рабочего можно записать следующим образом:

$$\dot k=\frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right)=\frac{\dot K}{L}-\frac{K}{L}\frac{\dot L}{L}=\frac{\dot K}{L}-k\frac{\dot L}{L}. \qquad (16.1.14)$$

Теперь тождество для валовых инвестиций принимает вид

$$i(t)=\dot k+\left(\mu+\frac{\dot L}{L}\right)k. \qquad (16.1.15)$$

Предполагается, что численность рабочей силы возрастает экспоненциально с показателем (темпом роста) n:

$$\frac{\dot L}{L}=n. \qquad (16.1.16)$$

Поэтому

$$i(t)=\dot k+(\mu+n)k=\dot k+\lambda k \qquad (16.1.17)$$

Здесь λ — сумма нормы амортизации капитала и темпа роста численности рабочей силы:

$$\lambda\equiv\mu+n. \qquad (16.1.18)$$

В дальнейшем будем предполагать, что λ есть положительная константа.

Введенные выше три основных уравнения — уравнение доходов и расходов (16.1.12), уравнение валовых инвестиций (16.1.15) и производственная функция (16.1.8) — позволяют составить *основное дифференциальное уравнение неоклассической модели экономического роста*:

$$f(k(t))=c(t)+\lambda k(t)+\dot k(t). \qquad (16.1.19)$$

Это уравнение показывает, что выпуск продукции, приходящейся на одного рабочего, раскладывается на три слагаемых: потребление на одного рабочего c; поддержание капиталовооруженности рабочего на прежнем уровне λk; чистый прирост капиталовооруженности рабочего $\dot k$[1]. Это основное соотношение проиллюстрировано на рис. 16.1. На верхнем графике изображена функция $f(k)$ и прямая λk. Вычитая прямую из кривой, получаем функцию $c+\dot k$, изображенную на нижнем графике. В двух критических точках $\hat k$ и $\tilde k$ функция $c+\dot k$ достигает максимума и обращается в нуль соответственно:

$$\begin{aligned} &f(\hat k)-\lambda\hat k\geqslant f(k)-\lambda k \text{ для всех } k>0\\ &f(\tilde k)-\lambda\tilde k=0. \end{aligned} \qquad (16.1.20)$$

При сделанных выше предположениях точки $\hat k$ и $\tilde k$ существуют и единственны.

Свойства устойчивости основного дифференциального уравнения экономического роста зависят от уровня потребления на одного рабочего. Это показано на рис. 16.2. В случае (*а*) потребление на одного рабочего равно нулю, по вертикальной оси откладывается $\dot k$, так что получаем график на фазовой плоскости. В точке $\tilde k$ производная

[1] Если рассматривается случай с дискретным временем, где $t=t_0, t_1, \ldots$, то основное дифференциальное уравнение имеет вид $f(k_t)=c_t+\lambda k_t+(k_{t+1}-k_t)$. Это уравнение — аналог основного дифференциального уравнения в случае с непрерывным временем. См. также примечание на стр. 479.

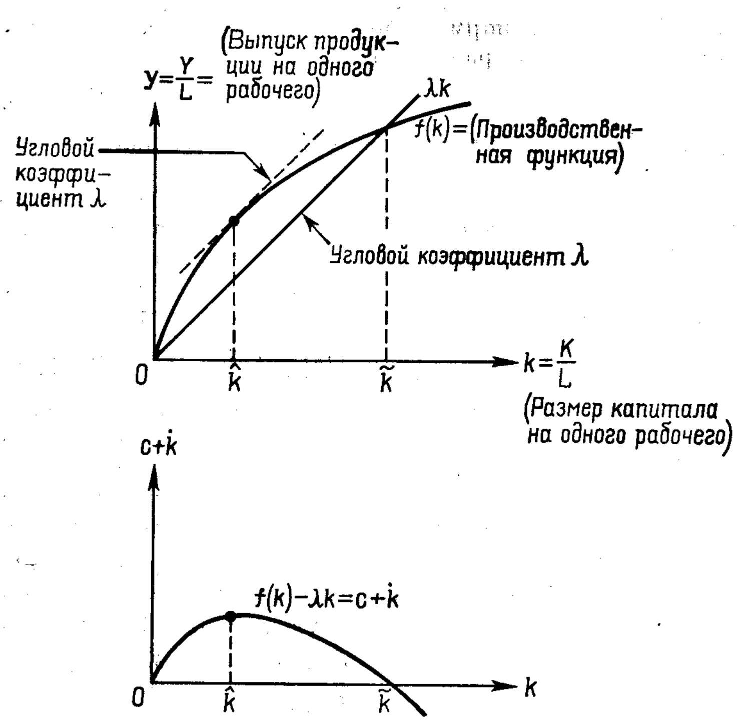

Рис. 16.1. Основное дифференциальное уравнение неоклассической модели экономического роста.

$\dot{k}$ равна 0, так что $\tilde{k}$ является точкой равновесия. Слева от точки $\tilde{k}$ производная $\dot{k}$ положительна, значит, k движется вправо; справа от $\tilde{k}$ производная $\dot{k}$ отрицательна, следовательно, k движется влево. Эти направления изображены стрелками. Очевидно, что $\tilde{k}$ есть точка локально устойчивого равновесия. При рассмотрении поведения системы в динамике очевидно, что любое малое отклонение k от $\tilde{k}$ со временем исчезнет и система вернется в $\tilde{k}$[1].

[1] Функция Ляпунова показывает локальную устойчивость в точке $\tilde{k}$:

$$V=[f(k)-\lambda k]^2.$$

В окрестности $\tilde{k}$ имеют место следующие соотношения:

$$V \geqslant 0 \quad V=0, \text{ только если } k=\tilde{k},$$

$$\frac{dV}{dt}=2[f(k)-\lambda k][f'(k)-\lambda]\dot{k} \leqslant 0 \text{ и } =0, \text{ только если } k=\tilde{k}.$$

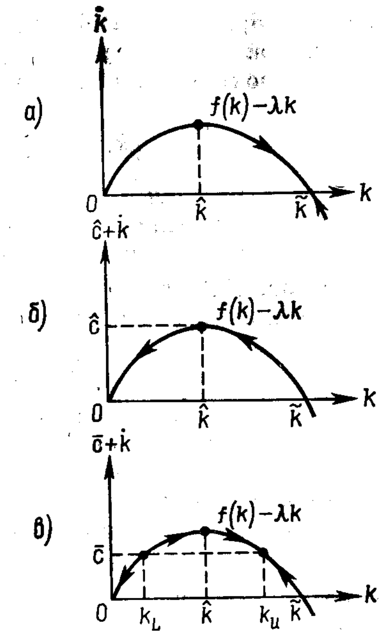

Рис. 16.2. Характеристика устойчивости основного дифференциального уравнения неоклассической модели экономического роста:
а) нулевой уровень потребления на одного рабочего ($c = 0$);
б) максимальный уровень потребления на одного рабочего ($c = \hat{c}$) (уровень потребления, соответствующий золотому правилу).
в) фиксированный уровень потребления на одного рабочего ($c = \bar{c}$, $0 < \bar{c} < \hat{c}$).

Как видно из рис. 16.1, в случае (b) потребление на одного рабочего может принимать максимальное значение $\hat{c}$, равное ординате кривой в точке $\hat{k}$, где $\hat{k}$ определяется из уравнения

$$f'(k) = \lambda = \mu + n \text{ при } k = \hat{k}. \qquad (16.1.21)$$

Уровень капиталовооруженности, равный $\hat{k}$, называется *уровнем капиталовооруженности золотого правила накопления*. Этому уровню соответствует равновесие, при котором достигается максимум такого уровня потребления на одного рабочего, который может выдерживаться сколь угодно долго. Максимальное значение уровня потребления, которое может сохраняться неопределенно долго, равно

$$\hat{c} = f(\hat{k}) - \lambda \hat{k}. \qquad (16.1.22)$$

Величина $\hat{c}$ называется *уровнем потребления на одного рабочего, соответствующим золотому правилу.* Условия (16.1.22) называют *золотым правилом накопления* [10].

Как показывает рис. 16.2, в точке равновесия $\hat{k}$ (уровень капиталовооруженности золотого правила) устойчивости нет. Отклонения вправо от $\hat{k}$ исключены, но влево возможны, что показано стрелками. Если капиталовооруженность снижается ниже $\hat{k}$, то она будет продолжать падать. Предположим, что $c = 0$ при $k = 0$, тогда единственной устойчивой точкой равновесия в случае (*b*) будет только начало координат.

Наконец, в случае (*c*) зафиксировано потребление на одного рабочего $\bar{c}$ меньшее, чем максимально возможное потребление на одного рабочего, $0 < \bar{c} < \hat{c}$. В этом случае линия потребления на одного рабочего $c = \bar{c}$ пересекает кривую в двух точках, соответствующих уровням капиталовооруженности k_L и k_U ($k_L < k_U$). Эти точки являются точками равновесия в том смысле, что, достигнув одной из них, система более не перемещается из этого положения. Однако по характеру устойчивости эти точки различны. Точка k_U является точкой устойчивого равновесия: стрелки показывают, что слабые отклонения со временем устраняются. В точке k_L наблюдается неустойчивое равновесие. Как показывают стрелки, если k меньше, чем k_L, то происходит уменьшение капиталовооруженности рабочего до нуля, а если k больше k_L, тогда капиталовооруженность рабочего возрастает до k_U. Таким образом, если потребление на одного рабочего установлено на некотором промежуточном уровне, соответствующем, например, прожиточному минимуму, то для того, чтобы система могла достичь точки устойчивого равновесия (k_U), необходим достаточно высокий первоначальный уровень капиталовооруженности рабочего. Это замечание показывает необходимость «большого толчка» для достижения критического уровня капиталовооруженности рабочего, после чего экономика будет благодаря собственной

динамике переходить ко все более высоким уровням капиталовооруженности рабочего, а следовательно, и к большему выпуску продукции на одного рабочего [1].

16.2. НЕОКЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

Задачу об оптимальном экономическом росте можно рассматривать как динамическую задачу рационального ведения хозяйства (задачу управления). Ее можно описать и проанализировать с помощью понятий теории управления: фазовых координат, управляющих параметров, уравнений движения, начального состояния и целевого функционала. В неоклассической задаче об оптимальном экономическом росте имеется одна фазовая координата — капиталовооруженность рабочего $k(t)$, а уравнение движения — это основное дифференциальное уравнение неоклассического экономического роста:

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - \lambda k(t) - c(t). \qquad (16.2.1)$$

Начальное состояние задается значением капиталовооруженности рабочего при $t = t_0$:

$$k(t_0) = k_0. \qquad (16.2.2)$$

С точки зрения центрального планирующего органа, обладающего властью над развитием всей экономики, управляющим параметром является потребление на одного рабочего, и задача состоит в выборе траектории потребления на одного рабочего в заданном интервале времени.

$$\{c(t)\} = \{c(t) \mid t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}. \qquad (16.2.3)$$

Здесь t_0 и t_1 — начальное и конечное время — считаются заданными, причем t_1 может принимать любые значения, как конечные, так и бесконечные. *Допустимой траекторией* называется любая кусочно-непрерывная траектория $\{c(t)\}$, удовлетворяющая уравнению движения и граничному условию, для которой

$$0 \leqslant c(t) \leqslant f(k(t)) \text{ для всех } t, \ t_0 \leqslant t \leqslant t_1. \qquad (16.2.4)$$

[1] Ростоу [11, 12] рассматривает «взлет», который можно рассматривать как критический период времени, в течение которого в результате внешних и внутренних потрясений экономика проходит через k_L.

Задача центрального планирующего органа состоит в выборе допустимой траектории потребления на одного рабочего, оптимальной для достижения некоторой экономической цели [1].

Предполагается, что экономическая цель такого центрального планирующего органа должна основываться на стандартах уровня жизни, оцениваемых величиной потребления на одного рабочего. В частности, предполагается, что в распоряжении центрального планирующего органа имеется *функция полезности*, определяющая полезность U в любой момент времени как функцию от потребления на одного рабочего [2]:

$$U = U(c(t)). \tag{16.2.5}$$

Будем считать, что функция полезности дважды дифференцируема и что предельная полезность — положительная, но убывающая функция, определенная при всех положительных значениях потребления на одного рабочего:

$$\frac{dU(c)}{dc} = U'(c) > 0, \quad \frac{d^2U(c)}{dc^2} = U''(c) < 0 \text{ для всех } c, \quad 0 < c < \infty. \tag{16.2.6}$$

Следовательно, функция полезности $U(\cdot)$ — это строго вогнутая монотонно возрастающая функция. Предположим также, что функция полезности удовлетворяет следующим предельным условиям:

$$\lim_{c\to 0} U'(c) = \infty, \quad \lim_{c\to\infty} U'(c) = 0. \tag{16.2.7}$$

Показателем кривизны функции полезности является *эластичность предельной полезности*

$$\sigma(c) = -c\frac{U''(c)}{U'(c)}, \tag{16.2.8}$$

которая, по (16.2.6), положительна при всех положительных значениях потребления на одного рабочего.

[1] В экономике при отсутствии центрального планирующего органа задача об оптимальном экономическом росте заключается в выборе подходящих комбинаций, из имеющихся инструментов экономической политики, например таких, как валютная и налоговая политика, с тем чтобы достичь поставленной цели. См. работы Удзава [13] и Эрроу и Курца [14].

[2] Более подробно функции полезности рассматриваются в разделе 7.2.

Функция полезности определяет полезность в некоторый момент времени, но задача центрального планирующего органа состоит в выборе всей траектории потребления в расчете на одного рабочего, а для этого надо сопоставлять показатели полезности, соответствующие разным моментам времени. Условимся, что полезности в различные моменты времени не зависят друг от друга: полезность в какой-либо момент времени непосредственно не зависит от потребления или полезности в любой другой момент времени. Условимся далее, что можно складывать полезности, соответствующие различным моментам времени, только после соответствующего дисконтирования для учета того факта, что ближайшее потребление более важно, чем отдаленное. Предположим, что норма дисконтирования δ постоянна и положительна, причем бóльшая норма дисконтирования свидетельствует о большем предпочтении близких по времени полезностей. Положив, что дисконтирующий множитель имеет вид экспоненты, получим значение полезности в момент времени t, приведенное к моменту времени t_0, равное $e^{-\delta(t-t_0)}\,U(c(t))$. В указанный интервал времени от t_0 до t_1 благосостояние W, соответствующее траектории потребления на одного рабочего $\{c(t)\}$, определяется интегрированием (суммированием) всех мгновенных полезностей по всему интервалу [1]:

$$W = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\delta(t-t_0)}\,U(c(t))\,dt. \tag{16.2.9}$$

Горизонт времени планирования может быть конечным или бесконечным. В случае если это время конечно, нужно задавать в конечный момент времени минимально допустимое значение капиталовооруженности для того, чтобы обеспечить возможность потребления и за пределами данного горизонта времени:

$$k(t_1) = k_1. \tag{16.1.10}$$

[1] В случае дискретного времени, как в примечании на стр. 473,

$$W = \sum_{t=t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^t U(c_t).$$

Здесь дисконтирующим множителем является $1/(1+\rho)$. См. работы Раднера [15], Гейла [16] и Мак-Фаддена [17].

Это граничное условие задано в форме неравенства, так как можно получить неправильные результаты, если величину капиталовооруженности рабочего в конечный момент времени принять строго равной k_1. Минимальный уровень капиталовооруженности в конечный момент времени связан с периодом, который следует за рассматриваемым интервалом времени. Можно было бы избежать многих трудностей, связанных с определением минимальной величины капиталовооруженности в конечный момент времени, если считать, что t_1 бесконечно, т. е. рассматривать тот случай, когда траектория $\{c(t)\}$ выбирается на все время в будущем. В этом случае, однако, интеграл благосостояния может расходиться. Сходимость интеграла гарантирована, если начальное значение капиталовооруженности рабочего меньше максимально достижимого уровня $\tilde{k}$ и норма дисконтирования положительна, так как в этом случае $c(t) \leqslant f(\tilde{k})$ и

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta(t-t_0)} U(c(t))\,dt \leqslant \int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta(t-t_0)} U(f(\tilde{k}))\,dt = \frac{U(f(\tilde{k}))}{\delta}, \tag{16.2.11}$$

так что интеграл благосостояния ограничен сверху.

Таким образом, задача о неоклассическом оптимальном росте для агрегированной замкнутой экономики с бесконечным горизонтом планирования и положительной нормой дисконтирования представляет собой задачу о выборе траектории потребления на одного рабочего $\{c(t)\}$ такой, что

$$\begin{aligned} &\max_{\{c(t)\}} W = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta(t-t_0)} (U(c)(t))\,dt \\ &\dot{k} = f(k) - \lambda k - c \qquad\qquad (16.2.12) \\ &k(t_0) = k_0 \\ &0 \leqslant c \leqslant f(k) \end{aligned}$$

$c(t)$ — кусочно-непрерывная функция.

Очевидно, что это динамическая задача рационального ведения хозяйства. Это задача управления, в которой единственной фазовой координатой является капиталовооруженность рабочего k, единственным управляющим

параметром — потребление на одного рабочего c, а в качестве целевого функционала берется интеграл благосостояния; основное дифференциальное уравнение неоклассического роста служит уравнением движения, а начальное значение капиталовооруженности рабочего — граничным условием. Множеством управлений здесь будут все кусочно-непрерывные функции потребления на одного рабочего, причем значения потребления не могут опускаться ниже нуля и в замкнутой экономике не могут подниматься выше выпуска продукции на одного рабочего. Решением этой задачи будет оптимальная траектория потребления на одного рабочего $\{c^*(t)\}$ и оптимальная траектория для капиталовооруженности рабочего $\{k^*(t)\}$. Эти траектории определяются для всех $t \geqslant t_0$. Решение зависит от двух строго вогнутых функций: функции полезности $U(\cdot)$ и производственной функции $f(\cdot)$ и от трех неотрицательных параметров: нормы дисконтирования δ, нормы амортизации плюс темп роста рабочей силы, $\mu + n = \lambda$, и начального значения капиталовооруженности рабочего k_0.

Так как (16.2.12) является задачей управления, то ее можно решить, используя принцип максимума. Функция Гамильтона для этой задачи записывается в виде

$$H = e^{-\delta(t-t_0)} \{U(c) + q[f(k) - \lambda k - c]\}, \tag{16.2.13}$$

где q — сопряженная переменная [1]. В фигурных скобках заключена сумма полезности и сопряженной переменной, умноженной на чистые капитальные вложения на одного рабочего. Это выражение подсказывает интерпретацию q как вмененной ценности (теневой цены) дополнительного капитала, измеряемого в терминах полезности. Таким образом, выражение в фигурных скобках представляет вмененную ценность выпуска на одного рабочего, а гамильтониан — вмененную ценность выпуска на одного рабочего, приведенную к моменту времени t_0. В соответствии с принципом максимума оптимальное управление (оптимальное потребление на одного рабочего) максимизирует гамильтониан в каждый момент времени. Из условия

[1] В стандартной форме, принятой в гл. 14,

$$H = e^{-\delta(t-t_0)} U(c) + y[f(k) - \lambda k - c].$$

Здесь y представляется в виде $qe^{-\delta(t-t_0)}$.

первого порядка для внутреннего максимума $\partial H/\partial c = 0$ следует, что

$$q = U'(c), \tag{16.2.14}$$

т. е. теневая цена капитальных вложений вдоль оптимальной траектории является просто предельной полезностью добавочного потребления на одного рабочего. Условия второго порядка для внутреннего решения выполняются благодаря строгой вогнутости функции полезности.

Каноническое уравнение для сопряженной переменной записывается следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\delta(t-t_0)} q(t)\right) = -\frac{\partial H}{\partial k}. \tag{16.2.15}$$

Отсюда следует, что

$$\dot{q} = -(f'(k) - (\lambda + \delta))\, q. \tag{16.2.16}$$

Преобразуем это уравнение

$$f'(k) + \frac{\dot{q}}{q} - \mu - n - \delta = 0. \tag{16.2.17}$$

Его можно интерпретировать так, что чистый доход от применения единицы капитала на одного рабочего в некотором интервале времени равен нулю; при этом чистый доход складывается из предельного продукта и доходов с капитала $(\dot{q}/q)$ минус потери от амортизации (μ), изменения в распределении в соответствии с ростом населения (n) и норма дисконтирования во времени (δ).

Поскольку на оптимальной траектории $q(t) = U'(c(t))$, то после дифференцирования равенства по времени получим:

$$\frac{\dot{q}}{q} = \frac{U''(c)}{U'(c)} \cdot \dot{c} = -\sigma(c)\frac{\dot{c}}{c}, \tag{16.2.18}$$

где $\sigma(c)$ есть ненулевая эластичность предельной полезности, определенная в (16.2.8). Итак, каноническое уравнение для сопряженной переменной можно представить как дифференциальное уравнение для управляющего параметра:

$$\dot{c} = \frac{1}{\sigma(c)}\left[f'(k) - (\lambda + \delta)\right] c. \tag{16.1.19}$$

Итак, по принципу максимума, если траектории $\{c^*(t)\}$ и $\{k^*(t)\}$ оптимальны, то они должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\dot{c} = \frac{1}{\sigma(c)}\left[f'(k) - (\lambda + \delta)\right] c \tag{16.2.20}$$

$$\dot{k} = f(k) - \lambda k - c.$$

Для того чтобы определить оптимальную траекторию, временно пренебрежем условием, наложенным на начальное значение капиталовооруженности рабочего. Тогда одним из возможных решений для (16.2.20) будет такое, в котором ни потребление на одного рабочего, ни капиталовооруженность не меняются во времени:

$$\dot{c} = 0, \quad \dot{k} = 0. \tag{16.2.21}$$

Чтобы потребление в расчете на одного рабочего было постоянным, необходимо, согласно (16.2.20), чтобы $k = k^*$, при этом

$$f'(k^*) = \lambda + \delta \tag{16.2.22}$$

и капиталовооруженность рабочего сохраняет свое значение k^*, если потребление на одного рабочего равно

$$c^* = f(k^*) - \lambda k^*. \tag{16.2.23}$$

При сделанных предположениях относительно производственной функции величины k^* и c^* существуют, единственны и удовлетворяют следующему неравенству:

$$0 < c^* < f(k^*), \tag{16.2.24}$$

так что условие (16.2.4) выполнено. Равновесие при $k(t) = k^*$ и $c(t) = c^*$ удовлетворяет всем необходимым условиям, за исключением начального граничного условия. Это равновесие при $\{k^*\}$, $\{c^*\}$ называется *траекторией сбалансированного роста*, поскольку вдоль нее потребление на одного рабочего и капиталовооруженность постоянны и как следствие этого общее потребление $(C = cL)$, весь объем капитала $(K = kL)$ и общий выпуск $(Y = Lf(k))$ растут с одинаковыми темпами, равными темпу роста рабочей силы. Если λ фиксировано, то из уравнения (16.2.22) k^* определяется как функция от δ такая, что

$$\lim_{\delta \to 0} k^* = \hat{k}, \tag{16.2.25}$$

где $\hat{k}$ — значение капиталовооруженности по золотому правилу, определенное в (16.1.21). Траекторию сбалан-

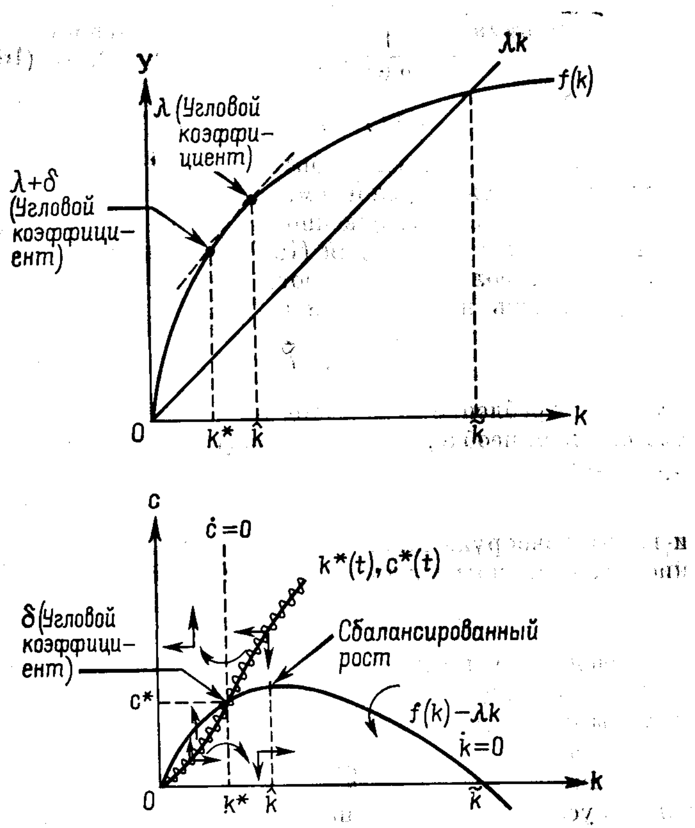

Рис. 16.3. Траектории оптимального экономического роста на фазовой плоскости.

сированного роста называют также «модифицированной траекторией роста, согласно золотому правилу», поскольку она является модификацией траектории роста в соответствии с золотым правилом при ненулевой норме дисконтирования. Теперь рассмотрим траекторию оптимального роста, когда учитывается начальное ограничение (16.2.2) на начальное значение капиталовооруженности рабочего. Взаимосвязь двух дифференциальных уравнений (16.2.20) можно показать графически, например так, как на рис. 16.3. Графики здесь построены с учетом рис. 16.1. На верхнем графике изображены производственная функция на одного рабочего $f(k)$ и луч из начала координат

с тангенсом угла наклона λ, пересекающий $f(k)$ в $\tilde{k}$. Отмечены две другие точки: $\hat{k}$, где касательная к производственной функции имеет тангенс угла наклона λ, и k^*, где тангенс угла наклона равен $\lambda+\delta$, как в (16.1.21) и в (16.2.22). В нижней части рисунка по осям откладываются показатели по капиталовооруженности k и потреблению на одного рабочего c.

Из дифференциального уравнения для потребления на одного рабочего следует, что

$$\dot{c}\begin{Bmatrix} = \\ > \\ < \end{Bmatrix} 0, \text{ если } f'k \begin{Bmatrix} = \\ > \\ < \end{Bmatrix} \lambda+\delta. \qquad (16.2.26)$$

Как видно из верхнего графика,

$$\dot{c}\begin{Bmatrix} = \\ > \\ < \end{Bmatrix} 0, \text{ если } k \begin{Bmatrix} = \\ > \\ < \end{Bmatrix} k^*. \qquad (16.2.27)$$

Это соотношение проиллюстрировано на нижнем чертеже. Влево от вертикальной прямой, проходящей через k^* и обозначенной $\dot{c}=0$, расположена область с направленными вверх стрелками ($\dot{c}>0$). Вправо от нее ($k>k^*$) расположена область с направленными вниз стрелками ($\dot{c}<0$).

Из дифференциального уравнения для капиталовооруженности рабочего следует, что

$$\dot{k}\begin{Bmatrix} = \\ > \\ > \end{Bmatrix} 0, \text{ если } c \begin{Bmatrix} = \\ < \\ > \end{Bmatrix} f(k)-\lambda k. \qquad (16.2.28)$$

Поскольку по вертикальной оси на нижнем графике наносится c, то кривая $f(k)-\lambda k$ изображает точки, в которых $\dot{k}=0$ (так она и обозначена). В точках, лежащих ниже этой кривой, $\dot{k}>0$, а в точках выше кривой $\dot{k}<0$. Это показано стрелками, направленными налево и направо. Две кривые $\dot{c}=0$ и $\dot{k}=0$ разбивают весь чертеж на четыре области, в каждой из которых поведение c и k характеризуется парой стрелок. Например, в верхней правой области и c, и k уменьшаются, тогда как в нижней левой области и c, и k возрастают. Обе кривые пересекаются в точке (k^*, c^*), которая соответствует траектории сбалансированного роста. Угловой коэффициент касательной к кривой $f(k) - \lambda k$ в этой точке равен норме дисконтирования δ.

Локальная устойчивость решений пары автономных дифференциальных уравнений (16.2.20) определяется с помощью характеристических чисел матрицы коэффициентов, получаемой при линеаризации этих уравнений в окрестности рассматриваемой точки. После линейного разложения в окрестности точки (k^*, c^*) уравнения принимают следующий вид:

$$\dot{c} \cong \frac{c^* f''(k^*)}{\sigma(c^*)}(k - k^*),$$
$$\dot{k} \cong -(c - c^*) + \delta(k - k^*), \tag{16.2.29}$$

так что искомые характеристические числа являются характеристическими корнями матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{c^* f''(k^*)}{\sigma(c^*)} \\ -1 & \delta \end{pmatrix}, \tag{16.2.30}$$

равными

$$\frac{1}{2}\left[\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \frac{4c^* f''(k^*)}{\sigma(c^*)}}\right]. \tag{16.2.31}$$

Поскольку эти корни действительные и противоположные по знаку числа, то точка равновесия (k^*, c^*), соответствующая сбалансированному росту, является *седловой точкой*. Ее ветвью устойчивости является кривая, которая обозначена на рис. 16.3 как $(k^*(t), c^*(t))$. Ветвь устойчивости состоит из всех тех точек, откуда можно достичь указанной точки равновесия.

Траектория оптимального экономического роста должна проходить по ветви устойчивости. Любому заданному начальному значению капиталовооруженности рабочего соответствует единственное оптимальное начальное значение потребления на одного рабочего, являющееся точкой ветви устойчивости. Такая точка существует и единственна для любого положительного k_0. Поэтому траектория оптимального роста является однозначно определенным отрезком ветви устойчивости. Другие траектории не удовлетворяют необходимым условиям оптимума, так как они захватывают либо недопустимые точки в верхней левой области рис. 16.3, либо внутренние точки нижней правой области [1].

Итак, поскольку траектория сбалансированного роста является отрезком ветви устойчивости, то если $k_0 = k^*$, то как c, так и k, будучи постоянными во времени, имеют оптимальные значения, что уже было показано ранее. Ветвь устойчивости — это монотонно возрастающая кривая, поэтому если $k_0 < k^*$, то $c^*(t)$ и $k^*(t)$ оптимально возрастают со временем, двигаясь вверх по ветви устойчивости к точке равновесия, соответствующей сбалансированному росту, если же $k_0 > k^*$, то $c^*(t)$ и $k^*(t)$ оптимально убывают со временем, опускаясь по ветви устойчивости к точке равновесия.

В любом случае

$$\lim_{t\to\infty} c^*(t) = c^*, \quad \lim_{t\to\infty} k^*(t) = k^*. \tag{16.2.32}$$

Это означает, что оптимальная траектория экономического роста в случае с бесконечным промежутком времени асимптотически приближается к точке равновесия, соответствующей сбалансированному росту.

Задача об оптимальном неоклассическом росте в конечном промежутке времени аналогична задаче (16.2.12), за исключением того, что верхний предел в интеграле благосостояния теперь равен t_1 — фиксированному конечному параметру и, кроме того, вводится дополнительное условие на значение капиталовооруженности в конце промежутка времени в t_1,— оно должно превышать некоторый заданный (достижимый) уровень (условие 16.2.10). Задача решается так же, как и в случае с бесконечным промежутком времени; остаются применимы и дифференциальные уравнения (16.2.20). Однако в этом случае конечное условие для сопряженной переменной имеет вид

$$e^{-\delta(t-t_0)} q(t_1)(k(t_1) - k_1) = 0. \tag{16.2.33}$$

Отсюда следует, что значение капиталовооруженности в момент t_1 либо равно k_1, либо теневая цена $q(t_1)$ равна

---

[1] Точка (k^*, c^*) не является локально устойчивой, и небольшие смещения увеличиваются по истечении некоторого времени. Для того чтобы вернуть систему обратно на оптимальную траекторию, требуются разрывные решения. См. работу Курца [18].

нулю. Можно показать, что в этом случае траектория оптимального роста удовлетворяет *магистральному свойству*: если промежуток времени достаточно велик, то траектории потребления на одного рабочего и капиталовооруженности в течение сколь угодно долгого времени находятся вблизи линии равновесия, соответствующей сбалансированному росту. В частности, капиталовооруженность при начальном значении изменяется в сторону k^* и остается в окрестности этой величины, покидая ее только для того, чтобы не нарушить условие $k(t_1) \geqslant k_1$. Таким образом, оптимальная траектория, выходя из начальной точки, направляется к «магистрали» сбалансированного роста и уходит с магистрали только для достижения предписанного конечного состояния [1].

Другое развитие основной результат получает в случае, когда предельная полезность постоянна, т. е. $U''(c) = 0$. Отсюда следует, что $\sigma = 0$. В этом случае соответствующим подбором единиц полезности или потребительских продуктов можно сделать $U(c) = c$; тогда подынтегральной функцией целевого функционала основной задачи (16.2.12) является дисконтированная величина потребления на одного рабочего

$$W = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta(t-t_0)} c(t)\, dt. \qquad (16.2.34)$$

Будем предполагать также, что потребление на одного рабочего не может опускаться ниже некоторого минимального уровня $\bar{c}$, так что

$$\bar{c} \leqslant c(t) \leqslant f(k). \qquad (16.2.35)$$

Гамильтониан в этом случае имеет вид

$$H = e^{-\delta(t-t_0)} \{c + q[f(k) - \lambda k - c]\} = \\ = e^{-\delta(t-t_0)} \{c(1-q) + q[f(k) - \lambda k]\}. \qquad (16.2.36)$$

Так как H линейно зависит от c, то решение имеет вид оптимального релейного управления:

$$c^* = \begin{Bmatrix} \bar{c} \\ c(t) \\ f(k) \end{Bmatrix}, \text{ если } q \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} 1. \qquad (16.2.37)$$

[1] См. работы Самуэльсона [19, 20] и Касса [21]. **Первоначальный вариант магистральной теоремы рассматривается в разделе 16.4.**

Например, если $q > 1$, то $\partial H/\partial c < 0$, т. е. гамильтониан является убывающей функцией потребления на одного рабочего. Следовательно, максимум достигается при минимальном значении потребления на одного рабочего. Канонические уравнения имеют вид

$$\dot{k} = f(k) - \lambda k - c \\ \dot{q} = -(f'(k) - (\lambda + \delta))\, q. \qquad (16.2.38)$$

Точкой равновесия, соответствующей сбалансированному росту ($\dot{k} = 0$, $\dot{q} = 0$), является точка (k^*, q^*), координаты которой определяются из соотношений

$$f'(k^*) = \lambda + \delta, \\ q^* = 1, \qquad (16.2.39) \\ c^* = f(k^*) - \lambda k^*.$$

На рис. 16.4 показан общий вид траектории оптимального роста в плоскости (k, q). Вертикальная прямая $\dot{q} = 0$, проходящая через $k = k^*$, отделяет область, в которой q убывает [1] (слева от k^*), от области, в которой q возрастает (справа от k^*). В области ниже прямой $q = 1$ $c^* = f(k)$, так как решение имеет вид оптимального релейного управления (отсюда следует, что $\dot{k} = -\lambda k$, т. е. k убывает). Выше прямой $q = 1$ $c = \bar{c}$, причем левее k_L k убывает. Между k_L и k_U k возрастает и убывает правее k_U. Значения k_L и k_U показаны на рис. 16.2 (c); предполагается, что $k_L < k^* < k_U$. Оптимальная траектория, помеченная волнистой линией, существует при условии, что

$$\bar{c} < c^*, \quad k(0) > k_L. \qquad (16.2.40)$$

Например, если начальное значение капиталовооруженности рабочего меньше, чем в точке равновесия, то потребление на одного рабочего должно сначала находиться на уровне прожиточного минимума $\bar{c}$, а затем, когда $k = k^*$, оно переключается (переходит скачком) на стационарный уровень:

$$c^* = f(k^*) - \lambda k^*. \qquad (16.2.41)$$

[1] Здесь рассматривается рост и убывание q как функции от t. — *Прим. перев.*

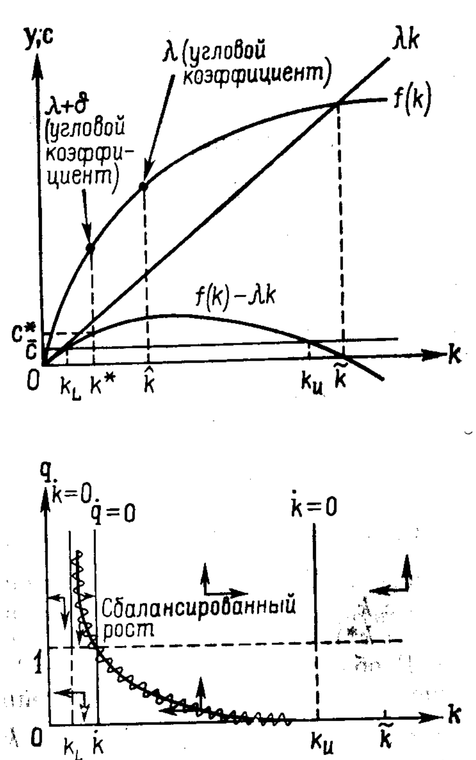

Рис. 16.4. Траектории оптимального экономического роста на фазовой плоскости при постоянной предельной полезности.

Следовательно, траектория оптимального роста асимптотически приближается к единственной седловой точке равновесия $(k^*, 1)$:

$$\lim_{t\to\infty} k^*(t) = k^*$$
$$\lim_{t\to\infty} q^*(t) = 1 \qquad (16.2.42)$$
$$\lim_{t\to\infty} c^*(t) = c^*.$$

В последнем варианте основной задачи промежуток времени ограничен и предельная полезность постоянна. В этом случае обсуждавшееся выше магистральное свойство *строго* выполняется, т. е. если t_1 достаточно велико,

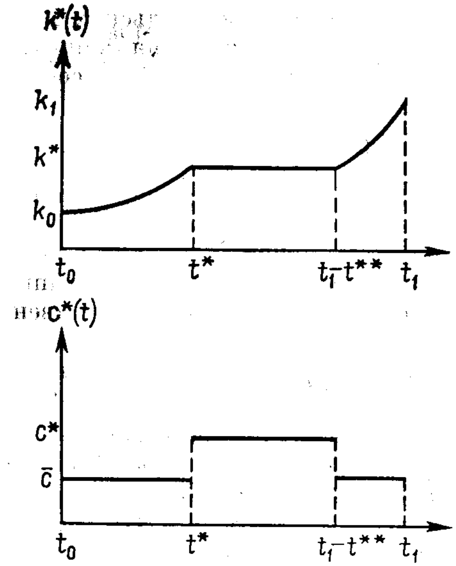

Рис. 16.5. Оптимальные траектории при постоянной предельной полезности ($t_1 > t_0$, $k_0 < k^* < k_1$).

то существуют $t^* > t_0$ и $t^{**} > 0$ такие, что

$$k^*(t) = k^* \text{ для всех } t,\ t^* \leqslant t \leqslant t_1 - t^{**}. \qquad (16.2.43)$$

Если $k_0 < k^* < k_1$, то, как показано на рис. 16.5, капиталовооруженность рабочего на оптимальной траектории сначала возрастает до k^*, некоторое время сохраняется на этом уровне, а потом постепенно увеличивается до k_1.

16.3. ДВУХСЕКТОРНАЯ МОДЕЛЬ РОСТА

Обобщением неоклассической модели роста является двухсекторная модель роста. В этой модели рассматриваются два сектора с различными технологиями производства продукции [22, 23, 24, 25]. Обычно в одном из секторов производятся однородные капитальные блага (средства производства), а в другом — однородные потребительские блага (предметы потребления).

Если $Y_C(t)$ — выпуск потребительских благ во время t, а $Y_I(t)$ — выпуск благ, идущих на капиталовложения, то валовой национальный продукт, соответствующий времени t, равен

$$Y(t) = Y_C(t) + pY_I(t), \tag{16.3.1}$$

где p — цена средств производства в единицах предметов потребления.

Каждый сектор в процессе производства использует для выпуска продукции два фактора — капитал и рабочую силу. Выпуск определяется производственными функциями

$$Y_j = F_j(K_j, L_j), \quad j = C, I, \tag{16.3.2}$$

где $K_j(t)$ — величина капитала в секторе j, а $L_j(t)$ — труд, используемый в этом секторе. Каждая производственная функция $F_j(\cdot\,\cdot)$ удовлетворяет неоклассическим условиям, аналогичным (16.1.3) и (16.1.4). В производственную функцию не входят внешние параметры, т. е. выпуск одного сектора непосредственно не зависит от выпуска или затрат в другом секторе.

Факторы производства однородны и могут свободно перемещаться из сектора в сектор. Предположим, что оба фактора используются полностью, т. е.

$$\begin{aligned} K_C(t) + K_I(t) &= K(t) \\ L_C(t) + L_I(t) &= L(t). \end{aligned} \tag{16.3.3}$$

Здесь $K(t)$ и $L(t)$ — значения имеющихся в наличии в момент t общих объемов капитала и рабочей силы. Общий объем капитала расширяется за счет капитальных вложений и подвергается изнашиванию с постоянной нормой амортизации μ:

$$\dot{K} = Y_I - \mu K. \tag{16.3.4}$$

В то же время численность рабочей силы возрастает с постоянным темпом n:

$$L = nL. \tag{16.3.5}$$

Модель можно сформулировать, рассматривая значения капитала и выпуска, приходящиеся на одного рабочего,

так как предполагается, что в производственной функции отдача на масштаб производства постоянна. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{Y_C}{L_C} &= F_C\left(\frac{K_C}{L_C},\ 1\right) = f_C(k_C) \\ \frac{Y_I}{L_I} &= F_I\left(\frac{K_I}{L_I},\ 1\right) = f_I(k_I). \end{aligned} \tag{16.3.6}$$

Здесь k_C и k_I — значения капиталовооруженностей по секторам, т. е.

$$k_j = \frac{K_j}{L_j} \geqslant 0, \quad j = C, I. \tag{16.3.7}$$

Производственные функции $f_j(k_j)$ удовлетворяют условиям, аналогичным (16.1.10).

Через l_j обозначим долю всей рабочей силы, которая относится к сектору j:

$$\begin{aligned} l_j &= \frac{L_j}{L} > 0, \quad j = C, I \\ l_C &+ l_I = 1. \end{aligned} \tag{16.3.8}$$

Тогда потребление на одного рабочего выражается как

$$y_C = \frac{Y_C}{L} = l_C f_C(k_C), \tag{16.3.9}$$

а капиталовооруженность рабочего равна

$$y_I = \frac{Y_I}{L} = l_I f_I(k_I). \tag{16.3.10}$$

Валовой национальный продукт, приходящийся на одного рабочего, равен

$$y = y_C + py_I. \tag{16.3.11}$$

Общая капиталовооруженность рабочего во всей экономике равна

$$k = \frac{K}{L} = k_C l_C + k_I l_I. \tag{16.3.12}$$

Следовательно, согласно (16.3.4),

$$\dot{k} = y_I - \lambda k, \tag{16.3.13}$$

где $\lambda = \mu + n$, как и ранее.

Задача об оптимальном экономическом росте для двухсекторной модели в случае, когда рассматривается бесконечный промежуток времени и постоянная предельная полезность, состоит в выборе таких траекторий $\{l_I(t)\}$, $\{l_C(t)\}$, $\{k_I(t)\}$ и $\{k_C(t)\}$, что

$$\max W = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta(t-t_0)} y_C\, dt$$

$$\begin{aligned} \dot{k} &= y_I - \lambda k \\ k(t_0) &= k_0 \\ y_C &= l_C f_C(k_C) \\ y_I &= l_I f_I(k_I) \\ l_I + l_C &= 1 \\ k &= k_I l_I + k_C l_C \\ l_I,\ l_C,\ k_I,\ k_C &\geqslant 0 \end{aligned} \tag{16.3.14}$$

$l_I(t)$, $l_C(t)$, $k_I(t)$, $k_C(t)$ — кусочно-непрерывные функции. Здесь k — фазовая переменная, l_I, l_C, k_I и k_C — управляющие параметры, $f_C(\cdot)$ и $f_I(\cdot)$ — строго вогнутые функции, а t_0, δ и k_0 — заданные параметры.

Можно получить решение этой задачи, предположив, что в экономике существует свободная конкуренция. В конкурентной экономике доход от используемых в производстве факторов одинаков во всех секторах и равен их предельным продуктам. Пусть производятся оба вида благ. Обозначим через w конкурентную ставку заработной платы, а через r — конкурентную оплату капитала, причем w и r определяются в единицах потребительского блага. При дифференцировании производственных функций $Y_j = L_j f_j(k_j/L_j)$, $j = C,\ I$ получаем, что

$$r = \frac{\partial Y_C}{\partial K_C} = f'_C(k_C), \quad r = p\frac{\partial Y_I}{\partial K_I} = pf'_I(k_I),$$

$$w = \frac{\partial Y_C}{\partial L_C} = f_C(k_C) - k_C f'_C(k_C), \tag{16.3.15}$$

$$w = p\frac{\partial Y_I}{\partial L_I} = p\,(f_I(k_I) - k_I f'_I(k_I)).$$

Если отношение ставки заработной платы к оплате капитала обозначить через ω:

$$\omega = \frac{w}{r}, \tag{16.3.16}$$

то в конкурентной экономике

$$\frac{f_C(k_C)}{f'_C(k_C)} - k_C = \omega = \frac{f_I(k_I)}{f'_I(k_I)} - k_I. \tag{16.3.17}$$

Это соотношение проиллюстрировано на рис. 16.6.

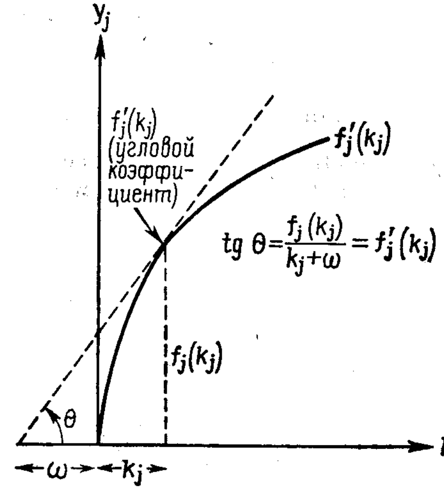

Рис. 16.6. Отношение заработной платы к оплате капитала ω, где $\omega = \dfrac{f_j(k_j)}{f'_j(k_j)} - k_j,\ j = C,\ I.$

Функция $\omega(k_j)$, определенная как

$$\omega(k_j) = \frac{f_j(k_j)}{f'_j(k_j)} - k_j, \quad j = C,\ I, \tag{16.3.18}$$

монотонно возрастает:

$$\frac{d\omega}{dk_j} = -\frac{f_j(k_j)\, f''_j(k_j)}{[f'_j(k_j)]^2} > 0. \tag{16.3.19}$$

Поэтому можно найти обратную функцию, получив тем самым конкурентную капиталовооруженность рабочего в обоих секторах как функцию от отношения заработной платы к оплате капитала:

$$k_j = k_j(\omega), \ k'_j(\omega) > 0, \ j = C,\ I, \tag{16.3.20}$$

причем из условий, которым удовлетворяет производственная функция, следует, что

$$k_j(0) = 0, \quad k_j(\infty) = \infty. \tag{16.3.21}$$

Таким образом, каждому неотрицательному значению ω соответствует в каждом секторе единственное отношение капитала к труду. Условимся далее, что или в секторе производства потребительских благ капитал используется интенсивнее, чем в секторе производства капитальных благ при любом положительном ω, т. е.

$$k_C(\omega) > k_I(\omega) \text{ для всех } \omega, \; 0 < \omega < \infty, \tag{16.3.22}$$

или же капитал используется интенсивнее в секторе производства капитальных благ при любом положительном ω, т. е.

$$k_I(\omega) > k_C(\omega) \text{ для всех } \omega, \; 0 < \omega < \infty. \tag{16.3.23}$$

В частности, исключены такие случаи, когда для некоторых ω $k_C(\omega) > k_I(\omega)$, а для других ω $k_C(\omega) < k_I(\omega)$ (перемена интенсивностей фактора).

Так как $k_C \neq k_I$, то из системы двух уравнений

$$l_I + l_C = 1, \quad k_I l_I + k_C l_C = k \tag{16.3.24}$$

всегда можно найти l_I и l_C

$$l_I = \frac{k_C - k}{k_C - k_I}, \quad l_C = \frac{k - k_I}{k_C - k_I}. \tag{16.3.25}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} y_I &= l_I f_I(k_I) = \left(\frac{k_C - k}{k_C - k_I}\right) f_I(k_I), \\ y_C &= l_C f_C(k_C) = \left(\frac{k - k_I}{k_C - k_I}\right) f_C(k_C). \end{aligned} \tag{16.3.26}$$

Кроме того, из условия о наличии свободной конкуренции следует, согласно (16.3.15), что если производятся оба вида благ, то цена благ, идущих на инвестиции, определенная в единицах потребительских благ, является функцией от отношения заработной платы к оплате капитала ω:

$$p(\omega) = \frac{f'_C(k_C(\omega))}{f'_I(k_I(\omega))}. \tag{16.3.27}$$

Запишем это выражение в логарифмах, а затем продифференцируем, используя (16.3.18) и (16.3.19),

$$\log p(\omega) = \log f'_C(k_C(\omega)) - \log f'_I(k_I(\omega)) \tag{16.3.28}$$

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{d\omega} = \frac{1}{k_I(\omega) + \omega} - \frac{1}{k_C(\omega) + \omega}. \tag{16.3.29}$$

Полученное выражение положительно (отрицательно), если $k_C > (<) \, k_I$.

До сих пор предполагалось, что производятся оба вида благ. Если экономика специализируется на производстве благ для капитальных вложений, то

$$\begin{aligned} l_I &= 1, & l_C &= 0, \\ k_I &= k, & k_C &= 0, \\ y_I &= f_I(k), & y_C &= 0. \end{aligned} \tag{16.3.30}$$

Если же она специализируется на производстве потребительских благ, то

$$\begin{aligned} l_I &= 0, & l_C &= 1, \\ k_I &= 0, & k_C &= k, \\ y_I &= 0, & y_C &= f_C(k). \end{aligned} \tag{16.3.31}$$

Зависимость между специализацией и отношением заработной платы к оплате капитала ω показана на рис. 16.7.

Предполагается, что $k_I(\omega) < k_C(\omega)$ для всех положительных ω. Следовательно, $k_C \geqslant k$ и $k_I \leqslant k$ в силу условий (16.3.24), неотрицательности l_I и l_C и предположения, что $k_C > k_I$. Экономика специализируется на производстве капитальных благ, если

$$\omega = \frac{f_I(k)}{f'_I(k)} - k = \omega_I(k), \tag{16.3.32}$$

и на производстве потребительских благ, если

$$\omega = \frac{f_C(k)}{f'_C(k)} - k = \omega_C(k). \tag{16.3.33}$$

Таким образом, на рис. 16.7 специализация происходит на одной из кривых, а одновременное производство обоих благ происходит в области, заключенной между ними.

Границей эффективного производства при фиксированном уровне капиталовооруженности рабочего k называется геометрическое место точек (y_I, y_C), в которых выпуск одного из видов благ, приходящийся на одного рабочего, достигает максимума при фиксированной величине выпуска другого блага на одного рабочего. Выражение для этой границы в параметрической форме получим, используя (16.3.9), (16.3.10) и (16.3.25),

$$y_I = \left(\frac{k_C - k}{k_C - k_I}\right) f_I(k_I), \quad y_C = \left(\frac{k - k_I}{k_C - k_I}\right) f_C(k_C), \tag{16.3.34}$$

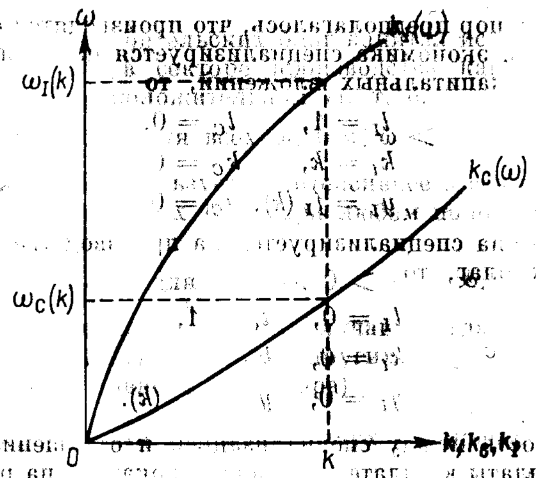

Рис. 16.7. Производятся оба вида продукции, если $\omega_C(k) < \omega < \omega_I(k)$. Производится только один вид продукции, если $\omega = \omega_I(k)$, или $\omega = \omega_C(k)$.

где $k_j = k_j(\omega)$ и ω меняется от $\omega_C(k)$ до $\omega_I(k)$. Если оба блага производятся, то отношение цен p равно абсолютной величине тангенса угла наклона границы эффективного производства:

$$\frac{dy_C}{dy_I} = -\frac{f'_C}{f'_I} = -p. \qquad (16.3.35)$$

Это показано на рис. 16.8. Если, однако, экономика специализирована на производстве капитальных благ, то $\omega = \omega_I(k)$ и

$$p < \frac{f'_C}{f'_I}. \qquad (16.3.36)$$

Если экономика специализирована на производстве потребительских благ, то $\omega = \omega_C(k)$ и

$$p \geqslant \frac{f'_C}{f'_I}. \qquad (16.3.37)$$

Точки специализации на рис. 16.8 находятся на пересечении границы эффективного производства с осями координат.

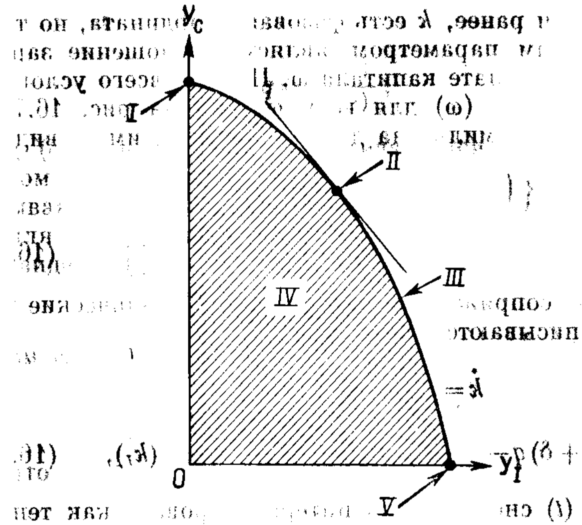

Рис. 16.8. Граница эффективного производства.

I — В этой точке экономика специализируется на производстве только потребительских благ ($P \geqslant f'_C/f'_I$).

II — $\frac{dy_C}{dy_I} = -\frac{f'_C}{f'_I} = -p$, где p — отношение цен.

III — Граница эффективного производства.

IV — Допустимые комбинации выпускаемых продуктов.

V — В этой точке экономика специализируется только на производстве капитальных благ ($p < f'_C/f'_I$).

Задачу об оптимальном экономическом росте (16.3.14) можно теперь сформулировать с помощью ω следующим образом:

$$\max_{\{\omega(t)\}} W = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta(t-t_0)} \left(\frac{k-k_I}{k_C-k_I}\right) f_C(k_C)\, dt,$$

$$\dot{k} = \left(\frac{k_C-k}{k_C-k_I}\right) f_I(k_I) - \lambda k,$$

$$k(t_0) = k_0, \quad k_j = k_j(\omega), \quad j = C, I, \qquad (16.3.38)$$

$$\omega_C(k) \leqslant \omega \leqslant \omega_I(k),$$

$\omega(t)$ есть кусочно-непрерывная функция.

Здесь, как и ранее, k есть фазовая координата, но теперь управляющим параметром является отношение заработной платы к оплате капитала ω. Прежде всего условимся, что $k_C(\omega) > k_I(\omega)$ для всех ω, как на рис. 16.7.

Функция Гамильтона для этой задачи имеет вид

$$H = e^{-\delta(t-t_0)} \left\{ \left(\frac{k-k_I}{k_C-k_I} \right) f_C(k_C) + \right.$$

$$\left. + q \left[\left(\frac{k_C-k}{k_C-k_I} \right) f_I(k_I) - \lambda k \right] \right\}, \qquad (16.3.39)$$

где $q(t)$ — сопряженная переменная. Канонические уравнения записываются как

$$\dot{k} = \left(\frac{k_C-k}{k_C-k_I} \right) f_I(k_I) - \lambda k$$

$$\dot{q} = (\lambda+\delta) q - \frac{1}{k_C-k_I} f_C(k_C) + \frac{q}{k_C-k_I} f_I(k_I), \qquad (16.3.40)$$

причем $q(t)$ снова можно интерпретировать как теневую цену капитальных вложений.

Оптимальное значение ω должно максимизировать гамильтониан H или, что эквивалентно, $He^{\delta(t-t_0)}$, но, используя приведенные выше соотношения, получаем

$$\frac{\partial}{\partial\omega}(He^{\delta(t-t_0)}) = [qf'_I(\cdot) - f'_C(\cdot)] \times$$

$$\times \left\{ \left(\frac{k-k_I}{k_C-k_I} \right) \left(\frac{\omega+k_I}{k_C-k_I} \right) \frac{dk_I}{d\omega} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{k_C-k}{k_C-k_I} \right) \left(\frac{\omega+k_C}{k_C-k_I} \right) \frac{dk_C}{d\omega} \right\}. \qquad (16.3.41)$$

В этом выражении второй сомножитель всегда положителен. Таким образом, если первый сомножитель положителен, т. е. если

$$q > \frac{f'_C(\cdot)}{f'_I(\cdot)}, \qquad (16.3.42)$$

то H достигает максимума при $\omega = \omega_I(k)$ и производятся только капитальные блага. Если же

$$q < \frac{f'_C(\cdot)}{f'_I(\cdot)}, \qquad (16.3.43)$$

то $\omega = \omega_C(k)$ и производятся только потребительские блага.

Если

$$q = \frac{f'_C(\cdot)}{f'_I(\cdot)}, \qquad (16.3.44)$$

то $\omega_C(k) < \omega < \omega_I(k)$ и производятся оба вида благ. В этом последнем случае специализация отсутствует, учитывая (16.3.17), можно написать каноническое уравнение для сопряженной переменной из (16.3.40) в следующем виде:

$$\dot{q} = [(\lambda+\delta) - f'_I(k_I)]\, q. \qquad (16.3.45)$$

В этом случае, однако,

$$q = p(\omega) = \frac{f'_C(k_C(\omega))}{f'_I(k_I(\omega))}, \qquad (16.3.46)$$

так что

$$\frac{\dot{q}}{q} = \frac{1}{p} \frac{dp}{d\omega} \dot{\omega}. \qquad (16.3.47)$$

Используя (16.3.29) и (16.3.45), получаем

$$\dot{\omega} = \frac{\lambda+\delta-f'_I(k_I(\omega))}{\dfrac{1}{k_I(\omega)+\omega} - \dfrac{1}{k_C(\omega)+\omega}}. \qquad (16.3.48)$$

Итак, если экономика не специализирована на производстве одного из благ, то дифференциальные уравнения для фазовой и сопряженной переменных принимают вид

$$\dot{k} = \left(\frac{k_C(\omega)-k}{k_C(\omega)-k_I(\omega)} \right) f_I(k_I(\omega)) - \lambda k,$$

$$\dot{\omega} = \frac{\lambda+\delta-f'_I(k_I(\omega))}{\dfrac{1}{k_I(\omega)+\omega} - \dfrac{1}{k_C(\omega)+\omega}}. \qquad (16.3.49)$$

Траектория сбалансированного роста, на которой k и ω стационарны, существует и единственна при $\omega = \omega^*$, $k = k^*$, причем

$$f'_I(k_I(\omega^*)) = \lambda + \delta$$

$$k^* = \frac{k_C(\omega^*) f_I(k_I(\omega^*))}{f_I(k_I(\omega^*)) + \lambda (k_C(\omega^*) - k_I(\omega^*))}. \qquad (16.3.50)$$

Таким образом, значения координат точки равновесия (k^*, ω^*) — это те единственные значения капиталовоору-

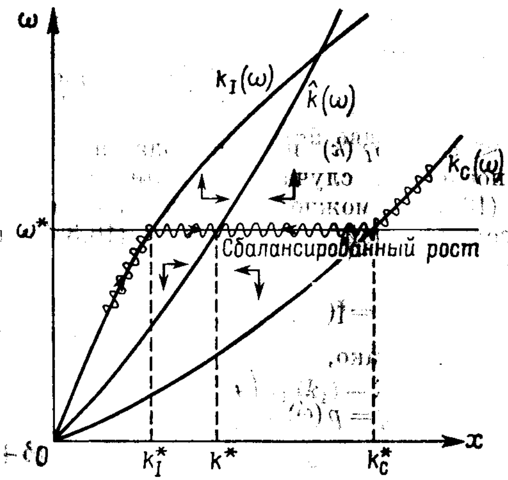

Рис. 16.9. Определение на фазовой плоскости траектории сбалансированного роста в двухсекторной модели ($k_c(\omega) > k_I(\omega)$ при любых ω).

женности и отношения заработной платы к оплате капитала, по достижении которых экономика всегда будет поддерживаться на неизменном оптимальном уровне.

Динамическое поведение неспециализированной двухсекторной экономики, описываемое уравнениями (16.3.49), можно показать на графике в фазовой плоскости (рис. 16.9). Этот график построен на основе рис. 16.7. На горизонтальной прямой $\omega = \omega^*$ не происходит изменений ω, а на кривой $k = \check{k}(\omega)$, определяемой выражением

$$\check{k}(\omega) = \frac{k_C(\omega) f_I(k_I(\omega))}{f_I(k_I) + \lambda(k_C(\omega) - k_I(\omega))}, \qquad (16.3.51)$$

не происходит изменений k. Прямая и кривая пересекаются в точке равновесия, соответствующей сбалансированности росту, где $\omega = \omega^*$ и $k = \check{k}(\omega^*) = k^*$. Направления изменения переменных показаны стрелками: ω возрастает (убывает), если ω больше (меньше) ω^*, тогда как k возрастает (убывает), если k меньше (больше) $\check{k}(\omega)$. Оптимальная траектория роста показана на рис. 16.9 волнистой линией. Если начальное значение капиталовооруженности меньше k_I^*, то сначала экономика будет специализироваться на производстве капитальных благ, перемещаясь по кривой $k_I(\omega)$, на которой возрастают k и ω. Когда k достигает значения k_I^*, то $\omega = \omega^*$. Далее, в экономике будет осуществляться оптимальное производство обоих продуктов, причем $\omega = \omega^*$, и экономика асимптотически приближается к состоянию сбалансированного роста. Аналогично, если начальное значение капиталовооруженности больше k_C^*, то оптимальная траектория проходит сначала через точки, в которых имеет место специализация на производстве потребительского продукта вплоть до достижения k_C^*. После этого начинается производство обоих продуктов при постоянном значении $\omega = \omega^*$ и убывании k до k^*. Поэтому для любого начального значения k траектория оптимального роста асимптотически приближается к точке равновесия (k^*, ω^*), соответствующей сбалансированному росту.

После рассмотрения случая, когда $k_C(\omega) > k_I(\omega)$ при всех ω, перейдем к рассмотрению случая, в котором капитал в секторе капитальных благ используется интенсивнее, чем в секторе потребительских благ, т. е. $k_C(\omega) < k_I(\omega)$ при всех ω. График в фазовой плоскости для этого случая изображен на рис. 16.10. Точка (k^*, ω^*) не

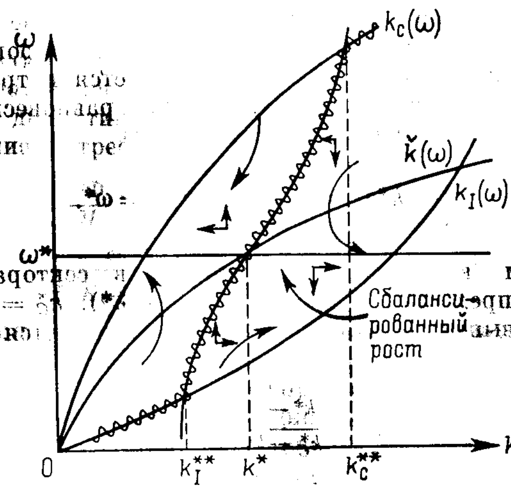

Рис. 16.10. Определение на фазовой плоскости траектории сбалансированного роста в двухсекторной модели ($k_I(\omega) > k_c(\omega)$ при любых ω).

вновь точка равновесия, соответствующая сбалансированному росту. Но здесь, как и в предыдущем разделе, точка равновесия является седловой точкой. Единственная оптимальная траектория сбалансированного роста, расположенная вблизи точки равновесия, проходит по ветви устойчивости, изображенной на рисунке волнистой линией. Однако, как и в предыдущем случае, если начальное значение капиталовооруженности рабочего очень мало или очень велико, то сначала возможен период специализации. В частности, если $k_0 < k_I^{**}$, то сначала происходит специализация на производстве капитальных благ, после чего следует движение без специализации по ветви устойчивости от k_I^{**}. Если же $k_0 > k_C^{**}$, то первоначальная специализация на производстве потребительских благ сменяется движением без специализации по ветви устойчивости от k_C^{**}. Итак, волнистая линия на рис. 16.10 отмечает траекторию оптимального роста.

Таким образом, в общем случае двухсекторная модель роста дает только одну траекторию оптимального роста капиталовооруженности рабочего и отношения заработной платы к оплате капитала $\{k^*(t)\}$ и $\{\omega^*(t)\}$. При этом сначала может быть период специализации на производстве капитальных (потребительских) благ в зависимости от того, достаточно ли мало (велико) начальное значение капиталовооруженности. Но, начиная с некоторого момента, специализация временно прекращается и траектория асимптотически приближается к точке равновесия, соответствующей сбалансированному росту

$$\lim_{t\to\infty} k^*(t) = k^*, \quad \lim_{t\to\infty} \omega^*(t) = \omega^*. \qquad (16.3.52)$$

Уровни капиталовооруженностей в секторах стремятся к пределам, равным $k_I^* = k_I(\omega^*)$, $k_C^* = k_C(\omega^*)$, а уровни выпусков на одного рабочего стремятся соответственно к

$$y_C^* = \frac{k^* - k_I^*}{k_C^* - k_I^*} f_C(k_C^*), \qquad y_I^* = \frac{k_C^* - k^*}{k_C^* - k_I^*} f_I(k_I^*). \qquad (16.3.53)$$

16.4. НЕОДНОРОДНЫЕ КАПИТАЛЬНЫЕ БЛАГА

В предыдущем разделе была обобщена неоклассическая модель роста на случай существования различных технологий производства. В этом разделе та же модель обобщается на случай, когда имеются различные виды капитальных благ [26, 27, 28, 29, 30, 9, 18].

В простейшем случае имеются два вида капитала и (однородный) труд. Выпуск, определяемый затратами факторов производства, может использоваться или для потребления, или для инвестиций. Имеющиеся технологические способы могут быть описаны в форме границы производственных возможностей:

$$C = \Phi(L, K_1, K_2, \dot K_1 + \mu K_1, \dot K_2 + \mu K_2). \qquad (16.4.1)$$

Здесь $C(t)$ — это (максимально возможное) потребление в момент времени t, при следующих затратах факторов производства: труда $L(t)$, капитала типа 1 $K_1(t)$ и капитала типа 2 $K_2(t)$. Часть выпуска, которая идет на увеличение капитала типа 1, равна $\dot K_1 + \mu K_1(t)$, часть, которая идет на увеличение капитала типа 2, равна $\dot K_2(t) + \mu K_2(t)$. Здесь μ — общая норма амортизации капитала. Справедливы следующие предположения: увеличение затрат какого-либо фактора влечет за собой увеличение потребления, тогда как за увеличением величины одного из двух типов валовых капиталовложений следует уменьшение потребления:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial K_1} > 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial K_2} > 0,$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial(\dot K_1 + \mu K_1)} < 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial(\dot K_2 + \mu K_2)} < 0. \qquad (16.4.2)$$

Предположим далее, что при увеличении затрат сразу всех трех факторов производства и валовых капиталовложений в одинаковой пропорции потребление также увеличивается в той же пропорции, т. е. функция $\Phi(\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot)$ есть однородная функция со степенью однородности, равной 1, т. е.

$$\alpha C = \Phi(\alpha L, \alpha K_1, \alpha K_2, \alpha(\dot K_1 + \mu K_1), \alpha(\dot K_2 + \mu K_2)) \qquad (16.4.3)$$

для всех $\alpha > 0$. Беря $\alpha = 1/L$, получаем

$$\frac{C}{L} = \Phi\left(1, \frac{K_1}{L}, \frac{K_2}{L}, \frac{\dot K_1}{L} + \mu\frac{K_1}{L}, \frac{\dot K_2}{L} + \mu\frac{K_2}{L}\right) \qquad (16.4.4)$$

или

$$c = \varphi(k_1, k_2, \dot k_1 + \lambda k_1, \dot k_2 + \lambda k_2), \qquad (16.4.5)$$

где c — потребление на одного рабочего, k_i — капиталовооруженность рабочего i-м типом капитала, $i = 1, 2$, а $\lambda = \mu + n$ — сумма темпа роста рабочей силы и нормы амортизации капитала [1].

Положим

$$z_1 = \dot k_1 + \lambda k_1, \quad z_2 = \dot k_2 + \lambda k_2. \qquad (16.4.6)$$

Тогда потребление на одного рабочего, согласно (16.4.5), равно

$$c = \varphi(k_1, k_2, z_1, z_2). \qquad (16.4.7)$$

При этом, согласно (16.4.2),

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\partial\varphi}{\partial k_1} > 0, \quad \varphi_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial k_2} > 0, \\ \varphi_3 &= \frac{\partial\varphi}{\partial z_1} < 0, \quad \varphi_4 = \frac{\partial\varphi}{\partial z_2} < 0. \end{aligned} \qquad (16.4.8)$$

Задача об оптимальных накоплениях с неоднородными капитальными благами состоит в выборе траекторий $\{z_1(t)\}$ и $\{z_2(t)\}$, таких, чтобы

$$\begin{gathered} \max W = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\delta(t-t_0)} U[\varphi(k_1, k_2, z_1, z_2)]\, dt + \\ + F(k_1(t_1), k_2(t_1)), \qquad (16.4.9) \\ \dot k_1 = z_1 - \lambda k_1, \quad \dot k_2 = z_2 - \lambda k_2, \\ k_1(0) = k_{10}, \quad k_2(0) = k_{20}. \end{gathered}$$

Первое слагаемое в выражении для благосостояния — это дисконтированное значение полезности потребления за промежуток времени от t_0 до t_1, а другое слагаемое — величина конечного капитала в момент времени t_1. Его можно использовать для производства потребительских благ за пределами рассматриваемого промежутка времени.

[1] Не смешивайте K_1 и K_2 с K_C и K_I, рассматриваемые в разделе 16.3. Первые (K_1 и K_2) — это капитальные фонды двух типов, а последние — капитальные фонды, используемые в двух разных секторах.

Поставленная задача — это задача управления, в которой k_1 и k_2 есть фазовые координаты, а z_1 и z_2 — управляющие параметры. Эту задачу можно решить с помощью принципа максимума.

Введем две сопряженные переменные q_1 и q_2 и напишем гамильтониан

$$\begin{aligned} H = e^{-\delta(t-t_0)}\{U[\varphi(k_1, k_2, z_1, z_2)] &+ q_1(z_1 - \lambda k_1) + \\ &+ q_2(z_2 - \lambda k_2)\}. \end{aligned} \qquad (16.4.10)$$

Сопряженные переменные можно интерпретировать как теневые цены капитальных вложений каждого из двух типов капитала. Для того чтобы гамильтониан достигал максимума по z_1 и z_2, необходимо, чтобы

$$q_1 = -U'(c)\,\varphi_3, \quad q_2 = -U'(c)\,\varphi_4, \qquad (16.4.11)$$

если решение является внутренним. Канонические уравнения для сопряженных переменных имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(e^{-\delta(t-t_0)} q_1(t)\right) &= -\frac{\partial H}{\partial k_1}, \\ \frac{d}{dt}\left(e^{-\delta(t-t_0)} q_2(t)\right) &= -\frac{\partial H}{\partial k_2}, \end{aligned} \qquad (16.4.12)$$

или

$$\begin{aligned} \dot q_1 &= (\lambda + \delta)\, q_1 - U'(c)\,\varphi_1, \\ \dot q_2 &= (\lambda + \delta)\, q_2 - U'(c)\,\varphi_2 \end{aligned} \qquad (16.4.13)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} q_1(t_1) &= \frac{\partial F}{\partial k_1(t_1)}, \\ q_2(t_1) &= \frac{\partial F}{\partial k_2(t_1)}. \end{aligned} \qquad (16.4.14)$$

Дифференцируя (16.4.11), получаем

$$\begin{aligned} \dot q_1 &= -U''(c)\,\varphi_3 \dot c - U'(c)\,\dot\varphi_3, \\ \dot q_2 &= -U''(c)\,\varphi_4 \dot c - U'(c)\,\dot\varphi_4. \end{aligned} \qquad (16.4.15)$$

Используя (16.2.8), перепишем канонические уравнения

$$\begin{aligned} \dot c &= \frac{1}{\sigma(c)}\left(\frac{\dot\varphi_3}{\varphi_3} - \frac{\varphi_1}{\varphi_3} - (\lambda + \delta)\right) c, \\ \dot c &= \frac{1}{\sigma(c)}\left(\frac{\dot\varphi_4}{\varphi_4} - \frac{\varphi_2}{\varphi_4} - (\lambda + \delta)\right) c. \end{aligned} \qquad (16.4.16)$$

Следовательно,

$$\frac{\dot\varphi_3}{\varphi_3}-\frac{\varphi_1}{\varphi_3}=\frac{\dot\varphi_4}{\varphi_4}-\frac{\varphi_2}{\varphi_4}. \tag{16.4.17}$$

Это основное условие эффективности, его можно выразить через прибыль на капитал. Если своя собственная норма прибыли для первого капитального блага равна $r_1=\frac{\partial \dot k_1}{\partial k_1}$, то

$$-\frac{\varphi_1}{\varphi_3}=\frac{-\dfrac{\partial c}{\partial k_1}}{\dfrac{\partial c}{\partial(\dot k_1+\lambda k_1)}}=\frac{\partial(\dot k_1+\lambda k_1)}{\partial k_1}=r_1+\lambda. \tag{16.4.18}$$

Но величина валового национального продукта равна

$$y=c+p_1(\dot k_1+\lambda k_1)+p_2(\dot k_2+\lambda k_2), \tag{16.4.19}$$

где p_1 и p_2 есть соответственно цены валовых инвестиций на одного рабочего для капиталов типа 1 и 2, выраженные в единицах потребления на одного рабочего. Следовательно,

$$p_1=-\frac{\partial c}{\partial(\dot k_1+\lambda k_1)}=-\varphi_3. \tag{16.4.20}$$

Записав r_2 и p_2 аналогичным способом для второго капитального блага, можно основное условие эффективности (16.4.17) представить в виде

$$r_1+\frac{\dot p_1}{p_1}=r_2+\frac{\dot p_2}{p_2}. \tag{16.4.21}$$

Это соотношение показывает, что валовая прибыль, равная собственной норме прибыли плюс прирост за счет капитала, должна быть одинаковой для обоих типов капитала.

Рассмотрим теперь равновесие, при котором $\dot k_1=0$ и $\dot k_2=0$, причем начальные условия для значений капиталов пока не будем принимать во внимание. В этом случае, согласно (16.4.5),

$$c=\varphi(k_1,\ k_2,\ \lambda k_1,\ \lambda k_2), \tag{16.4.22}$$

а поскольку все аргументы постоянны, то $\dot c=0$. Следовательно, все экстенсивные переменные — K_1, K_2, C — имеют

одинаковые темпы роста, равные темпу роста рабочей силы n. При таких условиях для того, чтобы c достигло максимального значения при некоторых значениях k_1 $(=k_1(0))$ и k_2 $(=k_2(0))$, требуется, чтобы

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial k_1}&=\varphi_1+\lambda\varphi_3=0\\ \frac{\partial c}{\partial k_2}&=\varphi_2+\lambda\varphi_4=0,\end{aligned} \tag{16.4.23}$$

или

$$-\frac{\varphi_1}{\varphi_3}=\lambda=-\frac{\varphi_2}{\varphi_4}. \tag{16.4.24}$$

При этом основное условие эффективности (16.4.17) выполнено, так как в этом случае φ_3 и φ_4 не зависят от времени. Значениями k_1 и k_2, которые удовлетворяют этим условиям, являются $\hat k_1$ и $\hat k_2$ — *уровни капиталовооруженностей золотого правила*. Как и в случае одного капитального блага, уровень капиталовооруженности золотого правила не удовлетворяет условиям оптимальности, если норма дисконтирования отлична от нуля, так как тогда при постоянном во времени значении c не выполняется дифференциальное уравнение

$$\dot c=\frac{1}{\sigma(c)}\left(\frac{\dot\varphi_3}{\varphi_3}-\frac{\varphi_1}{\varphi_3}-(\lambda+\delta)\right)c=-\frac{\delta c}{\sigma(c)}. \tag{16.4.25}$$

Равновесие, соответствующее сбалансированному росту, при котором k_1^*, k_2^*, c^* остаются постоянными и удовлетворяют условиям оптимальности, определяется из следующих условий:

$$\begin{gathered}\dot k_1=0,\quad \dot k_2=0,\quad \dot c=0,\\ c^*=\varphi(k_1^*,\ k_2^*,\ \lambda k_1^*,\ \lambda k_2^*)\\ -\frac{\varphi_1}{\varphi_3}=\lambda+\delta=-\frac{\varphi_2}{\varphi_4}.\end{gathered} \tag{16.4.26}$$

Именно к этому состоянию сбалансированного роста асимптотически приближается оптимальная траектория, если рассматриваемый промежуток времени бесконечен. Если промежуток времени конечен, то оптимальная траектория обладает *магистральным свойством* по отношению к состоянию сбалансированного роста: если t_1 достаточно велико, то оптимальные траектории $\{k_1^*(t)\}$ и $\{k_2^*(t)\}$ сначала изменяются от начальных значений (k_{10}, k_{20}) в направ-

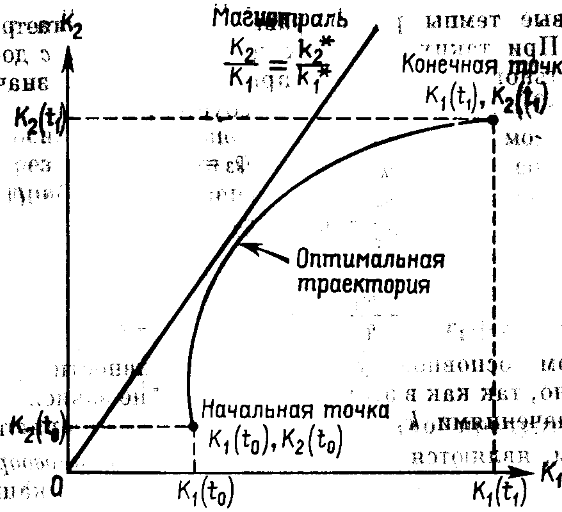

Рис. 16.11. Теорема о магистрали.

лении к точке равновесия (k_1^*, k_2^*), соответствующей сбалансированному росту, некоторое время остаются вблизи нее и уходят от нее со временем только для того, чтобы выполнялись условия на конечные размеры капиталов. При сбалансированном росте

$$K_1 = k_1 L, \quad K_2 = k_2 L \tag{16.4.27}$$

величины k_1 и k_2 постоянны и равны соответственно k_1^* и k_2^*; размеры капиталов возрастают темпом, равным темпу роста рабочей силы

$$\frac{\dot{K}_1}{K_1} = \frac{\dot{K}_2}{K_2} = n \tag{16.4.28}$$

вдоль луча

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{k_2^*}{k_1^*} \tag{16.4.29}$$

Этот луч называется «магистралью». Если t_1 достаточно велико, то оптимальные траектории для $K_1(t)$ и $K_2(t)$ перемещаются от начальных значений к магистральному лучу, находятся около него и уходят от него только

в конце рассматриваемого промежутка времени. Этот результат, проиллюстрированный на рис. 16.11, называется «теоремой о магистрали» [1].

ЗАДАЧИ

16-А. Докажите, что из предположений (16.1.4) и (16.1.5) относительно производственной функции $F(K, L)$ следует справедливость условий (16.1.10) для производственной функции на одного рабочего $f(k)$, где $k = K/L$.

16-Б. В модели экономического роста Харрода — Домара отношения капитала к выпуску и отношения потребления к доходу предполагаются постоянными и равными $1/b$ и γ соответственно.

1. Какие из предположений модели неоклассического роста здесь нарушены?
2. Найти темпы роста дохода на одного рабочего и капиталовооруженности $\dot{y}/y$ и $\dot{k}/k$.
3. Рассмотрите свойства устойчивости этой модели.

16-В. Пусть в неоклассической модели роста зафиксировано удельное потребление на одного рабочего $\bar{c} > 0$ и не происходит амортизации капитала ($\mu = 0$). Показать, что темп роста капитала $g = \dot{K}/K$ достигает максимума тогда, когда темп роста равен предельному продукту капитала, т. е. когда темп роста равен норме процента. Проиллюстрировать графически и обобщить на случай, когда $\mu > 0$.

16-Г. Рассмотрите золотое правило для каждой из производственных функций табл. 8.1.

16-Д. Докажите, что $\{c^*(t)\}$ и $\{k^*(t)\}$, удовлетворяющие (16.2.20), являются оптимальными траекториями задачи о неоклассическом оптимальном экономическом росте

---

[1] В работах Дорфмана, Самуэльсона и Солоу [27], Раднера [31], Моришима [32, 33], Фуруя и Инада [34], Инада [35], Никайдо [36] и Мак-Кензи [37] в отличие от материала, изложенного в разделе 16.4, рассматривается задача Майера, в которой в целевой функционал входят только конечные размеры наличного капитала. Кроме того, рассматривается такая (условная) экономика, в которой для производства продукции не требуется рабочая сила, уровень потребления равен нулю и задано соотношение объемов конечных капиталов.

(16.2.12) **в том смысле, что если $\{c^+(t)\}$ и $\{k^+(t)\}$ — это любые другие допустимые траектории, то** [88, 4]

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta(t-t_0)}U(c^*(t))\,dt \geqslant \int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta(t-t_0)}U(c^+(t))\,dt.$$

16-Е. В первом исследовании проблемы оптимального экономического роста Рамсей обосновывал бесконечность рассматриваемого промежутка времени ($t_1 = \infty$) и отсутствие дисконтирования ($\delta = 0$) этическими соображениями. Поскольку интеграл благосостояния в общем случае не сходится, Рамсей предложил другой подход. Он предположил, что существует конечный верхний предел либо для производственной функции, либо для функции полезности. В каждом из этих двух случаев полезность ограничена некоторым конечным верхним пределом B, называемым *«блаженством»* (bliss)

$$B = \max U(c) = U(c_B).$$

Здесь потребление на одного рабочего на уровне «блаженства» является конечным числом. Затем он рассматривал целевой функционал

$$\min_{\{c(t)\}} R = \int_{t_0}^{\infty} (B - U[c(t)])\,dt.$$

Этот подход имеет сходство с минимизацией «сожаления» («риска») в теории решений. Решите задачу Рамсея о минимизации R в условиях неоклассической модели роста [7].

16-Ж. Решить неоклассическую задачу об оптимальном экономическом росте, если, как и в предыдущей задаче, $t_1 = \infty$ и $\delta = 0$, но благосостояние измеряется как накопленный избыток сверх значения полезности, соответствующего золотому правилу, где

$$W = \int_{0}^{\infty} [U(c(t)) - U(\hat{c}(t)]\,dt,$$

$$\hat{c} = f(\hat{k}) - \lambda\hat{k}, \quad f'(\hat{k}) = \lambda.$$

Сравнить полученное решение с решением задачи Рамсея [39, 10].

16-З. В неоклассической модели роста допустимая траектория роста $\{c(t)\}$, $\{k(t)\}$ для $t_0 \leqslant t \leqslant \infty$ неэффективна тогда и только тогда, когда существует другая допустимая траектория роста $\{c'(t)\}$, $\{k'(t)\}$, имеющая ту же самую начальную капиталовооруженность и обеспечивающая по крайней мере то же потребление на одного рабочего в течение всего бесконечного промежутка времени и больший уровень потребления на одного рабочего на протяжении некоторой части этого периода, т. е.

$$c'(t) \geqslant c(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant \infty,$$
$$c'(t) > c(t), \quad t^1 \leqslant t \leqslant t^2, \quad t^1 < t^2.$$

1. Показать, что неэффективные программы не могут быть оптимальными с точки зрения оптимизации интеграла благосостояния.

2. Показать, что любая допустимая программа, которая с некоторого момента времени поддерживает значение капиталовооруженности выше уровня, соответствующего золотому правилу, является неэффективной. Иначе говоря, любая допустимая программа, для которой при некотором $\varepsilon > 0$ существует время $\hat{t}$, такое, **что** $k(t) \geqslant \hat{k} + \varepsilon$, $t > \hat{t}$ **или, что эквивалентно,**

$$f'(k(t)) \leqslant \lambda - \varepsilon, \quad t \geqslant \hat{t}$$

является неэффективной. См. [10].

16-И. В современном подходе к задаче с неограниченным интегралом благосостояния, когда $t_1 = \infty$ и $\delta = 0$, вводится критерий «превосходства», по которому траектория потребления на одного рабочего $c^1(t)$ превосходит траекторию потребления на одного рабочего $c^2(t)$ тогда и только тогда, когда существует время T^* такое, что [40, 10]

$$\int_{t_0}^{T} U(c^1(t))\,dt \geqslant \int_{t_0}^{T} U(c^2(t))\,dt$$

для всех $T \geqslant T^*$ (см. [40, 10]).

1. Доказать, что критерий превосходства является рефлексивным и транзитивным.

2. Показать на примере, что существуют две программы потребления, ни одна из которых не превосходит другую.

16-К. Получить решение неоклассической задачи об оптимальном экономическом росте, используя фазовую плоскость (k, q), а не плоскость (k, c), приведенную на рис. 16.3 (указание: найти множество точек, где $\dot{k} = 0$, геометрически, используя четырехмерное представление, когда осями являются k, q, $U'(c)$, c).

16-Л. Рассмотрим две следующие альтернативные возможности изменения условий в неоклассической модели роста:

1. $f'(k) > \lambda + \delta$ для всех $k \geqslant 0$;
2. $f'(0) < \lambda$.

В каждом из этих двух случаев вывести условия золотого правила и исследовать решение неоклассической задачи об оптимальном экономическом росте.

16-М. В неоклассической задаче об оптимальном экономическом росте с конечным временным горизонтом и постоянной предельной полезностью магистральное свойство выполняется строго, т. е. если t_1 достаточно велико, но конечно, и $\sigma = 0$, то

$$k^*(t) = k^* \quad \text{для} \quad t^* \leqslant t \leqslant t_1 - t^{**}.$$

1. Опишите, как вычисляются t^* и t^{**}.
2. Найдите в явной форме решение для случая, когда отношение капитала к выпуску постоянно и $f(k) = bk$.

16-Н. Коэффициент накоплений — это доля накоплений, идущих на инвестиции в общей сумме дохода:

$$s = \frac{I}{Y} = \frac{\dot{K} + \mu K}{Y}.$$

С помощью этого понятия можно сформулировать неоклассическую задачу об оптимальном экономическом росте [41, 40, 42].

1. Выведите основное уравнение неоклассического экономического роста с помощью s. Определите значение капиталовооруженности k и доли прибыли в доходе α в точке равновесия:

$$\alpha = \frac{rK}{Y}, \quad \text{где} \quad r = \frac{\partial F}{\partial K}.$$

Определите, является ли равновесие устойчивым, и исследуйте чувствительность значений k и α в точке

равновесия к изменениям параметров s и $\lambda = \mu + n$. Каково значение s, соответствующее золотому правилу?

2. Интеграл благосостояния можно записать с помощью коэффициента накопления:

$$W = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\delta(t-t_0)} U[(1-s) f(k)]\, dt.$$

Предположим, что s постоянно во времени. При каком значении s достигается максимум W?

3. Обычно максимум W находят, выбирая функции времени для коэффициента накоплений $\{s(t)\}$, где $0 \leqslant s(t) \leqslant 1$. Покажите, что без специальных предположений относительно вида функции полезности и производственной функции невозможно добиться того, чтобы оптимальная функция $s(t)$ всегда возрастала (или всегда убывала).

4. Отыщите оптимальную траекторию (функцию времени) для $\{s(t)\}$, если производственная функция имеет вид

$$f(k) = bk,$$

а функция полезности имеет вид

$$U(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma},$$

где b — постоянное положительное отношение капитала к выпуску, а σ — постоянная положительная эластичность предельной полезности.

5. Обобщите (4) на случай функции Кобба — Дугласа, т. е. когда

$$f(k) = bk^{\alpha}, \quad b > 0, \quad 0 < \alpha \leqslant 1.$$

16-О. В «обратной» задаче оптимизации траектория потребления $\{c(t)\}$ задана, а задача состоит в определении класса целевых функционалов, для которых эта траектория оптимальна. Решите обратную задачу оптимизации для неоклассического случая с производственной функцией Кобба — Дугласа, где $f(k) = Ak^{\alpha}$, а отношение накоплений постоянно, $s = \bar{s} \leqslant \alpha$ [18, 43, 44].

16-П. Предположите, что функция полезности в неоклассической задаче об оптимальном экономическом росте

(16.2.15) зависит от благосостояния, измеряемого величиной капиталовооруженности, так же как и от потребления на одного рабочего, так что функционал благосостояния имеет вид

$$W=\int_{t_0}^{t_1} e^{-\delta(t-t_0)}U(c, k)\,dt$$

$$\frac{\partial U}{\partial c}>0, \quad \frac{\partial U}{\partial k}>0.$$

Покажите, что может существовать множество стационарных решений. См. [45].

16-Р. В неоклассической модели роста с техническим прогрессом производственная функция имеет вид

$$Y(t) = A(t)\,F\,[B(t)\,K(t),\ C(t)\,L(t)].$$

Здесь функция $A(t)$ характеризует технические новшества, способствующие увеличению выпуска продукции, $B(t)$ характеризует технические новшества, способствующие росту капитала, и $C(t)$ характеризует технические новшества, способствующие росту рабочей силы [10, 4, 42].

1. Покажите, что единственным видом технического прогресса, согласующегося с равновесием сбалансированного роста, является технический прогресс, способствующий только росту рабочей силы (технический прогресс, нейтральный по Харроду). Получите решение для неоклассической задачи оптимального экономического роста в случае, когда $A(t) = B(t) = 1$ и $C(t) = e^{\varphi t}$.
2. Получите решение для неоклассической задачи об оптимальном экономическом росте в случае, когда технические новшества способствуют только увеличению выпуска (технический прогресс, нейтральный по Хиксу), когда $A(t) = e^{\alpha t}$ и $B(t) = C(t) = 1$.
3. Получите решение для неоклассической задачи об оптимальном экономическом росте в случае, когда технические новшества способствуют только росту капитала (технический прогресс, нейтральный по Солоу), когда $A(t) = C(t) = 1$ и $B(t) = e^{\beta t}$.

16-С. Если неоклассическая модель включает иностранную помощь, то основное дифференциальное уравнение экономического роста имеет вид

$$\dot{k} = f(k) - \lambda k - c + \alpha,$$

где α — размеры помощи на одного рабочего. Покажите графически, при каких условиях страна может достичь роста только с иностранной помощью. Полагая, что начальный капитал пренебрежимо мал и производственная функция является функцией Кобба — Дугласа, определить, как долго должна продолжаться помощь, чтобы экономика страны смогла достичь состояния, при котором возможен самостоятельный рост.

16-Т. Если неоклассическая модель включает иностранные займы, то уравнение дохода принимает вид

$$Y = C + I + (X - M),$$

где X обозначает экспорт, а M — импорт. Однако, в соответствии с уравнением платежного баланса,

$$X + D = M + \rho D,$$

где размеры иностранных кредитов D и величина процента по этим кредитам ρ считаются заданными.

1. Напишите основное дифференциальное уравнение экономического роста для этого случая, считая, что размер иностранного кредита на одного рабочего равен d.
2. Найдите траекторию оптимального экономического роста, максимизирующую функционал

$$W=\int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta(t-t_0)}U(c, d)\,dt$$

при условии, что

$$\frac{\partial U}{\partial c}>0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial c^2}<0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial d}<0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial d^2}<0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial c\,\partial d}=0.$$

Управляющими параметрами являются потребление на одного рабочего c, причем $0\leqslant c\leqslant f(k)$ и скорость изменения величины иностранных кредитов, приходящихся на одного рабочего, $\dot{d}=v$, причем $0\leqslant v\leqslant v_{\max}$.

16-У. В неоклассической модели со свободной конкуренцией ставка заработанной платы в условиях равновесия равна предельному продукту труда. Так как $F(K, L) = Lf(K/L) = Lf(k)$, то ставка заработной платы в условиях равновесия равна

$$w=f(k)-kf'(k).$$

Следовательно,

$$\frac{dw}{dk} = -kf''(k) > 0,$$

т. е. чем больше значение капиталовооруженности рабочего, тем выше заработная плата в условиях равновесия. В условиях неравновесия с меняющейся заработной платой заработная плата будет стремиться к величине заработной платы в условиях равновесия:

$$\dot{w} = \psi[w - (f(k) - kf'(k))], \quad \psi(t_0) = 0, \quad \psi' < 0.$$

Предположим, что рабочие полностью используют свою заработную плату на потребление. Покажите в плоскости (k, w) значения k и w, соответствующие состоянию равновесия. Покажите возможные траектории к точке равновесия после эпидемии, которая вывела из строя значительную часть рабочей силы (капитал сохраняется на прежнем уровне). При каких условиях траектории наверняка будут двигаться прямо к точке равновесия, а не закручиваться вокруг нее по спирали?

16-Ф. В экономике с избыточной рабочей силой предложение рабочей силы гибко реагирует на назначаемую государством ставку заработной платы w. Если число занятых рабочих в момент времени t равно $L(t)$, то общая сумма заработной платы равна $wL(t)$. Общая сумма заработной платы равна общему потреблению, если рабочие не делают сбережений, а капиталисты не потребляют. При равном посемейном распределении потребление на душу населения одинаково для всех и составляет

$$c = \frac{wL}{P} = wl,$$

где P — численность всего населения, растущая темпом n, а l — это доля работающих во всем населении.

Пусть k — капитал на душу населения, тогда дифференциальное уравнение экономического роста имеет вид

$$\dot{k} = F(k, l) - wl - \lambda k,$$

где $\lambda = \mu + n$ и $k(t_0)$ задано. Благосостояние определяется так:

$$W = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta(t-t_0)} U(c(t))\, dt.$$

Так как l — правильная дробь, а потребление не превосходит выпуска ($wl \leqslant F(k, l)$), то

$$0 \leqslant l \leqslant \min\left(\frac{F(k, l)}{w}, 1\right).$$

1. Найдите оптимальную траекторию для $l(t)$.
2. Обобщите модель на случай, когда допускаются сбережения. Пусть s — это та доля выпуска сверх выплаты рабочим, которая идет на образование капитала (в предыдущем случае $s = 1$).

Найдите оптимальные траектории для $s(t)$ и $l(t)$ [46].

16-Х. Как и в предыдущей задаче, предположим, что число занятых $L(t)$ не обязательно совпадает с численностью всего населения $P(t)$. Пусть $l(t)$ — доля работающего населения $\left(l(t) = \frac{L(t)}{P(t)}\right)$. Если k — капитал на душу населения, а c — потребление на душу населения, то

$$\dot{k} = F(k, l) - c - \lambda k.$$

Предположим, что функция полезности зависит не только от c, но и от l, тогда интеграл благосостояния имеет вид

$$W = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta(t-t_0)} U(c, l)\, dt,$$

где

$$\frac{\partial U}{\partial c} > 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial c^2} < 0, \quad \frac{\partial U}{\partial c}(0, l) = \infty,$$

$$\frac{\partial U}{\partial l} < 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial l^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial c\, \partial l} < 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial l}(c, 1) = -\infty.$$

Найдите оптимальные траектории для $c(t)$ и $l(t)$ при условии [47], что

$$0 \leqslant c \leqslant F(k, l), \quad 0 \leqslant l \leqslant 1 \text{ (см. [47])}.$$

16-Ц. Согласно неомальтузианцам, темп роста численности рабочей силы зависит от уровня жизни, измеряемого по потреблению на одного работающего. Найдите уровень золотого правила и определите оптимальные траектории экономического роста, если $n = n(c)$, причем

$$n'(c) > 0, \quad n''(c) < 0.$$

16-Ч. Рассмотрим задачу о региональном распределении капиталовложений в экономике, состоящей из двух районов. Пусть отношение выпуска Y_j к капиталу K_j в j-м районе постоянно, т. е.

$$Y_j = bK_j, \quad j = 1, 2.$$

Если коэффициент накопления в районе j равен s_j, то общий размер фондов для инвестиций равен

$$s_1Y_1 + s_2Y_2 = g_1K_1 + g_2K_2,$$

где $g_j = s_jb_j$, $j = 1, 2$. Пусть β — доля инвестиционных фондов, предназначенная для района 1, тогда, если пренебречь амортизацией,

$$\dot{K}_1 = \beta(g_1K_1 + g_2K_2), \quad \dot{K}_2 = (1 - \beta)(g_1K_1 + g_2K_2).$$

Найдите оптимальную функцию времени (траекторию) для $\{\beta(t)\}$, $0 \leqslant \beta(t) \leqslant 1$, при которой достигается максимум следующего интеграла благосостояния [47, 48, 49, 50]:

$$W = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\delta(t-t_0)} [(1 - s_1) b_1k_1 + (1 - s_2) b_2k_2]\, dt.$$

16-Ш. Задачу об оптимальном экономическом росте для двухсекторной модели можно сформулировать с помощью коэффициента накопления

$$s = \frac{py_I}{y}.$$

1. Сформулируйте задачу с помощью s.
2. Разберите задачу сравнительной статики для этой модели. Определите влияние изменений значений k, соответствующих уровню равновесия, на величины y_C, y_I, y и p при предположении, что s фиксировано и производятся оба вида благ.
3. Решите задачу оптимального экономического роста.

16-Щ. Обобщите анализ для двухсекторной модели на случай, когда предельная полезность является убывающей функцией, причем

$$W = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta(t-t_0)} U(y_C)\, dt,$$

$$\sigma(y_C) = -\frac{y_C U''(y_C)}{U'(y_C)} > 0.$$

16-Э. В двухсекторной модели, в которой рабочая сила свободно перераспределяется из одного сектора в другой, а капиталы закреплены за секторами, уравнения движения имеют вид

$$\dot{k}_I = \alpha l_I f_I(k_I) - \lambda k_I, \quad k_I(0) = k_{I_0},$$

$$\dot{k}_C = (1 - \alpha) l_I f_I(k_I) - \lambda k_C, \quad k_C(0) = k_{C_0}.$$

Здесь α — доля валовых капиталовложений, направляемых в сектор, производящий капитальные блага ($0 \leqslant \alpha \leqslant 1$), и l_I — доля рабочей силы, занятой в этом секторе ($0 \leqslant l_I \leqslant 1$), являются управляющими параметрами.

1. Найдите управления, минимизирующие время достижения максимально возможного потребления на одного рабочего.
2. Найдите управления, максимизирующие

$$W = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta(t-t_0)} (1 - l_1) f_C(k_C)\, dt.$$