Глава 14
Принцип максимума

Третьим направлением в теории решения задач управления является *принцип максимума*. Этот метод в отличие от классического вариационного исчисления позволяет решать задачи управления, в которых на управляющие параметры наложены весьма общие ограничения, причем в отличие от динамического программирования обычно заранее предопределяется ряд свойств решения [1]. Благодаря этому принцип максимума является основным математическим приемом, используемым при расчете оптимального управления во многих важных задачах математики, техники и экономики.

Принцип максимума применяется к общей задаче управления, имеющей вид

$$\max_{\{\mathbf{u}(t)\}} J = \int_{t_0}^{t_1} I(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\,dt + F(\mathbf{x}_1, t_1)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}(t_1) &= \mathbf{x}_1 \\ \{\mathbf{u}(t)\} &\in U. \end{aligned} \qquad (14.0.1)$$

Здесь $I(\cdot\cdot\cdot)$, $F(\cdot\cdot)$ и $\mathbf{f}(\cdot\cdot\cdot)$ — заданные непрерывно дифференцируемые функции; t_0, $\mathbf{x}_0$ — фиксированные параметры; t_1 или $\mathbf{x}_1$ — фиксированные параметры (либо с помощью уравнения $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ определяется конечная поверхность). Траектория управления $\{\mathbf{u}(t)\}$ должна принадлежать фиксированному множеству управлений U, причем $\mathbf{u}(t)$ — кусочно-непрерывная функция времени, значения которой должны принадлежать некоторому фиксированному множеству Ω, являющемуся непустым компактным подмножеством пространства E^r.

[1] Основная литература по принципу максимума [1, 2, 3, 4, 5].

14.1. СОПРЯЖЕННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ, ФУНКЦИЯ ГАМИЛЬТОНА, ПРИНЦИП МАКСИМУМА

В ряде предшествующих глав мы применяли метод множителей Лагранжа к различным задачам статической оптимизации. При решении задач этим методом вводились новые переменные — множители Лагранжа — по одной переменной для каждого ограничения, затем строилась функция Лагранжа (лагранжиан) и определялась седловая точка этой функции, т. е. точка, где функция имеет максимум по исходным переменным и минимум по новым переменным. Принцип максимума можно рассматривать как распространение метода множителей Лагранжа на задачи динамической оптимизации (задачи управления). Рассмотрим частный случай задачи управления (14.0.1), когда фиксирован конечный момент времени, а на управляющие параметры не накладываются никакие ограничения. Эта задача относится к классу задач максимизации при наличии ограничений. Максимизируемое выражение представляет собой целевой функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} I(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\,dt + F(\mathbf{x}_1, t_1), \qquad (14.1.1)$$

а ограничениями являются n дифференциальных уравнений, которые можно представить в виде

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1. \qquad (14.1.2)$$

Действуя способом, аналогичным тому, который применялся в статических задачах, введем вектор (вектор-строку) новых переменных — по одной переменной для каждого из n ограничений

$$\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)). \qquad (14.1.3)$$

Эти новые переменные, называемые *сопряженными переменными*, представляют собой динамические эквиваленты множителей Лагранжа в статических задачах максимизации при наличии ограничений [1]. Так как каждая из сопряженных переменных соответствует одному из дифференциальных уравнений движения, определенных на промежутке времени от t_0 до t_1, то и сопряженные переменные, вообще говоря, зависят от времени, что и отмечено в (14.1.3), причем предполагается, что эти переменные являются ненулевыми непрерывными функциями времени.

Поступая и далее по аналогии со статическим случаем, определим функцию Лагранжа, равную максимизируемому выражению плюс скалярное произведение вектора множителей Лагранжа и вектора ограничений. Поскольку ограничения и сопряженные переменные определены на всем временно́м промежутке, то скалярное произведение следует определить с помощью знака интеграла. Выражение, соответствующее функции Лагранжа, приобретает вид

$$L = J + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{y}\,[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{x}}]\,dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \{I(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{y}\,[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{x}}]\}\,dt \overset{+}{-} F(\mathbf{x}_1, t_1). \quad \mathbf{(14.1.4)}$$

Как и в задачах статики, седловая точка лагранжиана и здесь определяет решение. Однако в данном случае седловая точка принадлежит пространству функций. Точка $(\{\mathbf{u}^*(t)\}, \{\mathbf{y}^*(t)\})$ представляет собой седловую точку в том случае, если

$$L(\{\mathbf{u}(t)\}, \{\mathbf{y}^*(t)\}) \leqslant L(\{\mathbf{u}^*(t)\}, \{\mathbf{y}^*(t)\}) \leqslant$$
$$\leqslant L(\{\mathbf{u}^*(t)\}, \{\mathbf{y}(t)\}). \quad \mathbf{(14.1.5)}$$

Тогда траектория управления $\{\mathbf{u}^*(t)\}$ является решением задачи управления.

---

[1] Для сопряженных переменных нет общепринятых наименований и обозначений. Эти переменные называют также «множителями», «вспомогательными переменными», «двойственными переменными». Используются также обозначения $\mathbf{\Psi}$, $\mathbf{z}$, $\boldsymbol{\lambda}$ и $\mathbf{p}$. Применяемое в данной книге обозначение согласуется с обозначениями множителей Лагранжа в задачах статической оптимизации (см. гл. 2—6).

В самом деле, второе неравенство

$$\int_{t_0}^{t_1} \{(\mathbf{y}^* - \mathbf{y})\,[\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, t) - \dot{\mathbf{x}}^*]\}\,dt \leqslant 0 \qquad (14.1.6)$$

выполняется для всех непрерывных функций $\{\mathbf{y}(t)\}$ только тогда, когда

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, t). \qquad (14.1.7)$$

Действительно, в противном случае можно было бы взять такую функцию $\{\mathbf{y}(t)\}$, значения которой в тех точках, где это равенство не выполняется, подобраны с учетом того, чтобы интеграл в 14.1.6 был больше нуля. Следовательно, оптимальная траектория удовлетворяет уравнениям движения. С другой стороны, первое из неравенств (14.1.5) показывает, что

$$J\{\mathbf{u}^*(t)\} \geqslant J\{\mathbf{u}(t)\} + \int_{t_0}^{t_1} \{\mathbf{y}^*[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{x}}]\}\,dt. \quad (14.1.8)$$

Следовательно, при всех траекториях $\{\mathbf{u}(t)\}$, удовлетворяющих уравнениям движения, выполняется неравенство

$$J\{\mathbf{u}^*(t)\} \geqslant J\{\mathbf{u}(t)\}, \qquad (14.1.9)$$

и, следовательно, $\{\mathbf{u}^*(t)\}$ является оптимальной траекторией. Оптимальное значение целевого функционала равно значению функции Лагранжа в седловой точке.

Рассмотрим теперь необходимые условия для существования такой седловой точки. Из (14.1.4) следует, что переход от сопряженных переменных $\mathbf{y}(t)$ к $\{\mathbf{y}(t) + \Delta\mathbf{y}(t)\}$, где $\Delta\mathbf{y}(t)$ — произвольная непрерывная функция времени, изменит функцию Лагранжа на

$$\Delta L = \int_{t_0}^{t_1} \Delta\mathbf{y}\,[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{x}}]\,dt. \qquad (14.1.10)$$

Так как необходимое условие первого порядка для существования минимума L относительно $\{\mathbf{y}(t)\}$ требует, чтобы $\Delta L = 0$, то, согласно основной лемме вариационного исчисления, должны выполняться уравнения движения, т. е.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t). \qquad (14.1.11)$$

Таким образом, выполнение уравнений движения, являющееся в данном случае необходимым условием, полностью аналогично необходимому условию для статических задач — выполнению соответствующих ограничений.

Выведем теперь остальные необходимые условия. Отметим, что если в (14.1.4) проинтегрировать по частям выражение $-\mathbf{y}(t)\dot{\mathbf{x}}(t)$, то L преобразуется к виду

$$L=\int_{t_0}^{t_1}\{I(\mathbf{x},\mathbf{y},t)+\mathbf{y}\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)+\dot{\mathbf{y}}\mathbf{x}]\,dt+$$
$$+F(\mathbf{x}_1,t_1)-[\mathbf{y}(t_1)\mathbf{x}(t_1)-\mathbf{y}(t_0)\mathbf{x}(t_0)]. \qquad (14.1.12)$$

Первые два слагаемых, стоящих под знаком интеграла, являются по определению *функцией Гамильтона*:

$$H(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{y},t)\equiv I(\mathbf{x},\mathbf{u},t)+\mathbf{y}\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y},t). \qquad (14.1.13)$$

Иначе говоря, функция Гамильтона определяется как сумма подынтегральной функции целевого функционала и скалярного произведения вектора сопряженных переменных и вектора функций, указывающих скорость изменения фазовых координат. Следовательно,

$$L=\int_{t_0}^{t_1}\{H(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{y},t)+\dot{\mathbf{y}}\mathbf{x}\}\,dt+$$
$$+F(\mathbf{x}_1,t_1)-[\mathbf{y}(t_1)\mathbf{x}(t_1)-\mathbf{y}(t_0)\mathbf{x}(t_0)]. \qquad (14.1.14)$$

Исследуем теперь, каков результат перехода от траектории управления $\{\mathbf{u}(t)\}$ к траектории управления $\{\mathbf{u}(t)+\Delta\mathbf{u}(t)\}$ и соответствующего перехода с фазовой траектории $\{\mathbf{x}(t)\}$ на фазовую траекторию $\{\mathbf{x}(t)+\Delta\mathbf{x}(t)\}$. При этом

$$\Delta L=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{\partial H}{\partial\mathbf{u}}\Delta\mathbf{u}+\left(\frac{\partial H}{\partial\mathbf{x}}+\dot{\mathbf{y}}\right)\Delta\mathbf{x}\right\}dt+\left[\frac{\partial F}{\partial\mathbf{x}_1}-\mathbf{y}(t_1)\right]\Delta\mathbf{x}_1, \qquad (14.1.15)$$

где

$$\frac{\partial H}{\partial\mathbf{u}}=\left(\frac{\partial H}{\partial u_1},\frac{\partial H}{\partial u_2},\ldots,\frac{\partial H}{\partial u_r}\right)$$
$$\frac{\partial H}{\partial\mathbf{x}}=\left(\frac{\partial H}{\partial x_1},\frac{\partial H}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial H}{\partial x_n}\right). \qquad (14.1.16)$$

Так как для существования максимума необходимо, чтобы приращение лагранжиана ΔL обращалось в ноль, и поскольку (14.1.15) должно выполняться при любых $\{\Delta\mathbf{u}(t)\}$, то

$$\frac{\partial H}{\partial\mathbf{u}}=0,\quad t_0\leqslant t\leqslant t_1 \qquad (14.1.17)$$

$$\dot{\mathbf{y}}=-\frac{\partial H}{\partial\mathbf{x}},\quad t_0\leqslant t\leqslant t_1 \qquad (14.1.18)$$

$$\mathbf{y}(t_1)=\frac{\partial F}{\partial\mathbf{x}_1}. \qquad (14.1.19)$$

Необходимые условия (14.1.17) показывают, что в каждой точке оптимальной траектории функция Гамильтона достигает максимума относительно управляющих параметров. При этом r условий (14.1.17) являются условиями существования внутреннего максимума, так как в рассматриваемой задаче не наложено никаких ограничений на значения управляющих параметров. В общем случае, если на значения управляющих параметров наложены некоторые ограничения, условия (14.1.17) принимают вид

$$\max_{\{\mathbf{u}\in\Omega\}} H(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{y},t)\ \text{при всех}\ t,\ t_0\leqslant t\leqslant t_1, \qquad (14.1.20)$$

т. е. в точках оптимальной траектории, в каждый момент времени функция Гамильтона достигает максимума относительно управляющих параметров[1]. Следовательно, в любой момент времени t из указанного промежутка достигается либо внутренний максимум, при котором, как и в классических задачах математического программирования,

$$\frac{\partial H}{\partial\mathbf{u}}=0, \qquad (14.1.21)$$

либо максимум достигается на границе. В последнем случае, как в нелинейном программировании,

$$\frac{\partial H}{\partial\mathbf{n}}=0, \qquad (14.1.22)$$

где $\mathbf{n}$ — вектор нормали к границе области Ω. На рис. 14.1 эти две возможности проиллюстрированы на примере скалярного случая ($r=1$).

[1] Предполагается, что матрица Гессе $\partial^2H/\partial\mathbf{u}^2$ порядка $r\times r$ отрицательно определена или отрицательно полуопределена в каждый момент времени из указанного промежутка.

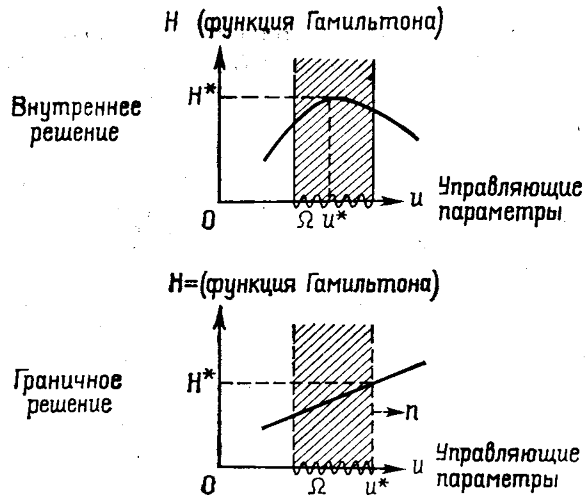

Рис. 14.1. Иллюстрация принципа максимума для скалярного случая ($r=1$). Время t фиксировано ($t_0 \leqslant t \leqslant t_1$).

Необходимые условия (14.1.18) и (14.1.19) представляют собой соответственно дифференциальные уравнения и граничные условия для сопряженных переменных. Дифференциальные уравнения показывают, что скорость изменения каждой из сопряженных переменных равняется частной производной функции Гамильтона по соответствующей фазовой координате, взятой со знаком минус. Граничные условия показывают, что конечное значение каждой из сопряженных переменных равно частной производной функции F ($\mathbf{x}$, t) по соответствующей фазовой координате.

Используя функцию Гамильтона, можно представить дифференциальные уравнения для фазовых координат, т. е. уравнения движения, в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}. \tag{14.1.23}$$

Данные дифференциальные уравнения для фазовых координат и дифференциальные уравнения для сопряженных переменных плюс все граничные условия образуют систему уравнений, называемых *каноническими уравнениями*

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$
$$\dot{\mathbf{y}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{y}(t_1) = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_1}. \tag{14.1.24}$$

Эта система состоит из $2n$ дифференциальных уравнений, на одну половину которых наложены граничные условия, заданные в начальный момент, а для оставшихся n уравнений граничные условия заданы в конечный момент.

Рассмотрим теперь, как функция Гамильтона изменяется во времени. Так как $H = H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}, t)$, то

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}\dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{y}}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{14.1.25}$$

Преобразуем это выражение, используя уравнения движения

$$\frac{dH}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{y}}\right)\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}\right)\dot{\mathbf{u}} + \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{14.1.26}$$

Первый член этого выражения равен нулю в точках оптимальной траектории, в силу дифференциального уравнения для сопряженных переменных. Второй член обращается в нуль потому, что либо частная производная равна нулю, если максимум внутренний, либо $\dot{\mathbf{u}}$ обращается в нуль, если максимум достигается на границе. Следовательно, в точках оптимальной траектории

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{14.1.27}$$

В частности, если задача является автономной, т. е. если $I(\cdots)$ и $\mathbf{f}(\cdots)$ не зависят явно от времени, то и гамильтониан не зависит явно от времени и, следовательно, функция Гамильтона постоянна во времени в точках оптимальных траекторий, так как $dH/dt = 0$.

Итак, при решении задачи с помощью принципа максимума сначала вводятся n сопряженных переменных $\mathbf{y}(t)$ и определяется функция Гамильтона

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}, t) = I(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{y}\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t). \tag{14.1.28}$$

Затем отыскиваются функции $\{\mathbf{u}(t)\}$, $\{\mathbf{y}(t)\}$ и $\{\mathbf{x}(t)\}$, удовлетворяющие следующим условиям [1]:

$$\max_{\{\mathbf{u}\in\Omega\}} H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}, t) \text{ при всех } t,\ t_0 \leqslant t \leqslant t_1$$
$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{14.1.29}$$
$$\dot{\mathbf{y}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{y}(t_1) = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_1}.$$

[1] Данная формулировка принципа максимума основана на некоторых условиях регулярности, аналогичных условиям регулярности ограничений в задачах нелинейного программирования (см. стр. 106). Если не делать предположения о выполнении этих усло-

Эти условия являются необходимыми для существования локального максимума [1]. Форма искомого решения, т. е. оптимального управления, очень часто может быть найдена непосредственно в результате максимизации гамильтониана. При этом оптимальные управляющие параметры обычно определяются не как функции времени, а как функции сопряженных переменных. Для того чтобы записать управляющие параметры в виде функций времени, требуется предварительно определить, как зависят от времени сопряженные переменные. Это в свою очередь приводит к необходимости решать двухточечную граничную задачу, представленную каноническими уравнениями с граничными условиями. В этой системе, состоящей из $2n$ дифференциальных уравнений, для n уравнений заданы *начальные* граничные условия (относительно фазовых координат), а для других n уравнений заданы *конечные* граничные условия (относительно сопряженных переменных).

14.2. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СОПРЯЖЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Как уже было показано выше, принцип максимума можно считать обобщением метода множителей Лагранжа для задач динамики. Множители Лагранжа в статических зада-

---

вий, то можно ввести неотрицательную сопряженную переменную y_0, соответствующую подынтегральной функции. Тогда функция Гамильтона имеет вид

$$H' = y_0 I(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{y}\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t).$$

Если условия регулярности выполнены, то величина y_0, соответствующая решению задачи, всегда положительна. Поэтому можно нормализовать набор из $n + 1$ сопряженных переменных, положив y_0 равным единице, при этом функция H' сводится к H. При невыполнении условий регулярности величина y_0, соответствующая решению, может быть равной нулю. Этот случай аналогичен задач нелинейного программирования, в которой не выполняются условия регулярности ограничений.

[1] Указанные условия, вообще говоря, не являются достаточными для существования максимума. Кроме того, они не всегда приводят к единственному решению или к глобальному максимуму. Однако эти условия являются необходимыми и достаточными, если функция Гамильтона линейна относительно управляющих параметров [Розоноэр (1959)] или если максимум функции Гамильтона представляет собой вогнутую функцию относительно фазовых координат [Мангасарян (1966)].

чах доставляют информацию о чувствительности решения к изменениям постоянных ограничений, а сопряженные переменные, появляющиеся при применении принципа максимума, также несут информацию о чувствительности решения к изменениям параметров.

Значение функции Лагранжа, определенной выражением (14.1.4), при $\mathbf{u}(t) = \{\mathbf{u}^*(t)\}$, $\mathbf{y}(t) = \{\mathbf{y}^*(t)$, $\mathbf{x}(t) = \{\mathbf{x}^*(t)\}$ совпадает с оптимальным значением целевой функции. Следовательно, из (14.1.14) вытекает, что

$$J^* = \int_{t_0}^{t_1} \{H(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \mathbf{y}^*, t) + \dot{\mathbf{y}}^*, \mathbf{x}^*\}\,dt + F(\mathbf{x}_1^*, t_1) - [\mathbf{y}^*(t_1)\,\mathbf{x}^*(t_1) - \mathbf{y}^*(t_0)\,\mathbf{x}(t_0)]. \tag{14.2.1}$$

Характеристиками чувствительности решения к изменениям параметров t_0, t_1 и $\mathbf{x}(t_0)$ являются частные производные от J^* по этим переменным.

Чувствительность оптимального значения целевого функционала к изменению начального момента времени t_0 определяется значением производной

$$\frac{\partial J^*}{\partial t_0} = -[H^* + \dot{\mathbf{y}}^*\mathbf{x}^*]_{t_0} + [\mathbf{y}^*\dot{\mathbf{x}}^* + \dot{\mathbf{y}}^*\mathbf{x}^*]_{t_0} = -[H^* - \mathbf{y}^*\dot{\mathbf{x}}^*]_{t_0} = -[I(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, t)]_{t_0}, \tag{14.2.2}$$

т. е. величиной подынтегральной функции в начальный момент времени, взятой со знаком минус. Следовательно, при сдвиге начального момента времени происходит уменьшение J^* на величину, зависящую от того, какая часть подынтегральной функции оказывается потерянной в результате этого сдвига. Характеристикой чувствительности величины J^* к изменениям конечного момента времени t_1 является величина производной

$$\frac{\partial J^*}{\partial t_1} = [H^* + \dot{\mathbf{y}}^*\mathbf{x}^*]_{t_1} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}(t_1)}\frac{\partial \mathbf{x}^*(t_1)}{\partial t_1} + \frac{\partial F}{\partial t_1} - [\mathbf{y}^*\mathbf{x}^* + \mathbf{y}^*\dot{\mathbf{x}}^*]_{t_1} = [I(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, t)]_{t_1} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}(t_1)}\frac{d\mathbf{x}^*(t_1)}{dt_1} + \frac{\partial F}{\partial t_1}(\mathbf{x}^*(t_1)\,t_1). \tag{14.2.3}$$

Чувствительность оптимального значения целевого функционала к изменениям начального фазового состояния

$\mathbf{x}(t_0)$ **определяется начальным значением оптимальной сопряженной переменной**, т. е.

$$\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}(t_0)} = \mathbf{y}^*(t_0). \tag{14.2.4}$$

В частности, если значение одной из сопряженных переменных в начальный момент равно нулю, то решение нечувствительно к малым изменениям начального значения соответствующей фазовой координаты. Отсюда следует, что начальные значения сопряженных переменных можно интерпретировать как изменения оптимального значения целевого функционала, вызванные изменениями начальных значений соответствующих фазовых координат. Если целевой функционал имеет размерность некоторой экономической величины, такой, например, как выручка, стоимость или прибыль (когда цена умножается на количество), а фазовая координата имеет размерность экономического количества, то сопряженная переменная измеряется как цена. Поэтому ее можно называть *теневой ценой.* Таким образом, любой динамической задаче рационального ведения хозяйства, связанной с распределением ресурсов во времени, соответствует некоторая двойственная задача оценивания во времени, состоящая в определении сопряженных переменных как функций времени. Вполне очевидно, что при такой интерпретации сопряженные переменные являются динамическими аналогами множителей Лагранжа, возникающих в статических задачах рационального хозяйствования.

14.3. ПРИНЦИП МАКСИМУМА И ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

С помощью принципа максимума можно вывести необходимые условия существования экстремума в задачах вариационного исчисления [8, 9, 3]. В классической задаче вариационного исчисления управляющие параметры суть скорости изменения фазовых координат, причем на значения управляющих параметров не накладывается никаких ограничений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}$$
$$\Omega = E^r. \tag{14.3.1}$$

Функция Гамильтона в данном случае имеет вид

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}, t) = I(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) + \mathbf{y}\dot{\mathbf{x}}. \tag{14.3.2}$$

Условие первого порядка существования максимума функции Гамильтона относительно $\dot{\mathbf{x}}$ требует, чтобы

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \frac{\partial I}{\partial \dot{\mathbf{x}}} + \mathbf{y} = 0, \tag{14.3.3}$$

так что

$$\mathbf{y} = -\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}. \tag{14.3.4}$$

Продифференцируем по времени правую и левую части этого уравнения

$$\dot{\mathbf{y}} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right). \tag{14.3.5}$$

Но, согласно каноническим уравнениям для сопряженных переменных,

$$\dot{\mathbf{y}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\partial I}{\partial \mathbf{x}}. \tag{14.3.6}$$

Сопотасвляя (14.3.5) и (14.3.6), получаем уравнение Эйлера, известное в вариационном исчислении:

$$\frac{\partial I}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right) = 0. \tag{14.3.7}$$

Условия второго порядка для существования максимума функции Гамильтона определяются свойствами матрицы Гессе, составленной из вторых частных производных функции Гамильтона. Если матрица

$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \dot{\mathbf{x}}^2}\right) \tag{14.3.8}$$

отрицательно определена или отрицательно полуопределена,

то выполняется условие Лежандра: матрица

$$\left(\frac{\partial^2 I}{\partial \dot{\mathbf{x}}^2}\right) \tag{14.3.9}$$

отрицательно определена или отрицательно полуопределена.

Согласно принципу макси ума, если $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{x}}$ является оптимальным управлением, то при любом другом управлении $\dot{\mathbf{z}}$

$$H(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, t) \geqslant H(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{z}}, \mathbf{y}, t), \tag{14.3.10}$$

так что, привлекая (14.3.2),

$$I(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) + \mathbf{y}\dot{\mathbf{x}} \geqslant I(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{z}}, t) + \mathbf{y}\dot{\mathbf{z}}. \tag{14.3.11}$$

Преобразуя это неравенство с использованием (14.3.4), получаем условие Вейерштрасса

$$E(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t, \dot{\mathbf{z}}) = I(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{z}}, t) - I(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) - \frac{\partial I}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)(\dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{x}}) \leqslant 0. \tag{14.3.12}$$

Наконец, согласно принципу максимума, и $\mathbf{y}$ и H являются непрерывными функциями времени, а так как

$$\mathbf{y} = -\frac{\partial I}{\partial \dot{\mathbf{x}}}, \quad H = I - \frac{\partial I}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\dot{\mathbf{x}}, \tag{14.3.13}$$

то $\partial I/\partial \dot{\mathbf{x}}$ и $I - (\partial I/\partial \dot{\mathbf{x}})\,\dot{\mathbf{x}}$ также суть непрерывные функции времени. Следовательно, выполняются условия Вейерштрасса — Эрдмана в точке излома

$$\frac{\partial I}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \text{ и } I - \frac{\partial I}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\dot{\mathbf{x}} \text{ непрерывны в точке излома.} \tag{14.3.14}$$

Итак, мы вывели из принципа максимума необходимые условия экстремума в задачах вариационного исчисления. Частные задачи вариационного исчисления также можно исследовать с помощью принципа максимума. Например, если подынтегральная функция $I(\cdots)$ не зависит явно от времени, т. е. в случае автономной задачи, то, согласно (14.1.27), функция Гамильтона является постоянной величиной вдоль оптимальной траектории

$$H = I - \frac{\partial I}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\dot{\mathbf{x}} = \text{const}. \tag{14.3.15}$$

Тот же вывод для данного случая был получен и в (12.1.16).

14.4. ПРИНЦИП МАКСИМУМА И ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Между принципом максимума и динамическим программированием, представляющими собой два подхода к решению общей задачи управления, существуют тесные взаимосвязи [10, 11].

Функция оптимального поведения $J^*(\mathbf{x}, t)$ определяется в динамическом программировании как оптимальное значение целевого функционала задачи с начальным состоянием $\mathbf{x}$ и начальным временем t; затем требуется найти решение основного дифференциального уравнения в частных производных (уравнения Беллмана)

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = \max_{\{\mathbf{u}\}}\left[I(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\right]. \tag{14.4.1}$$

Взаимосвязь между этим подходом и подходом принципа максимума основана на уравнении (14.2.4), которое показывает, что изменение оптимального значения целевого функционала, вызванное изменением начального состояния, равно начальному значению сопряженной переменной. Используя понятие функции оптимального поведения, можно записать

$$\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{y}. \tag{14.4.2}$$

Следовательно, выражение, стоящее в квадратных скобках в уравнении Беллмана, представляет собой функцию Гамильтона

$$I(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = I(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{y}\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}, t). \tag{14.4.3}$$

Выражение (14.4.1) можно записать в виде

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = \max_{\{\mathbf{u}\}}[H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}, t)]. \tag{14.4.4}$$

Это уравнение включает отыскание максимума функции Гамильтона относительно управляющих параметров, принадлежащих области управления. То же самое требуется сделать согласно принципу максимума. Если $\mathbf{u}$ — это управление, максимизирующее функцию Гамильтона, то

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = H\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}}, t\right). \tag{14.4.5}$$

Полученное уравнение называется *уравнением Гамильтона — Якоби*. Возьмем производную по $\mathbf{x}$ от обеих частей этого уравнения

$$-\frac{\partial^2 J^*}{\partial \mathbf{x}\,\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}\right)' \frac{\partial^2 J^*}{\partial \mathbf{x}^2}. \tag{14.4.6}$$

Но в результате дифференцирования (14.4.2) получаем

$$\dot{\mathbf{y}} = (\dot{\mathbf{x}})' \frac{\partial^2 J^*}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial^2 J^*}{\partial t\, \partial \mathbf{x}}. \tag{14.4.7}$$

Поскольку $J^*(\mathbf{x}, t)$ в динамическом программировании предполагается непрерывно дифференцируемой, то величины смешанных производных второго порядка не зависят от порядка дифференцирования. Сопоставляя два последних уравнения и используя указанное свойство смешанных производных, приходим к каноническим уравнениям принципа максимума

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} \\ \dot{\mathbf{y}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}. \end{aligned} \tag{14.4.8}$$

Наконец, из конечного граничного условия для уравнения Беллмана

$$J^*(\mathbf{x}_1, t_1) = F(\mathbf{x}_1, t_1) \tag{14.4.9}$$

вытекает конечное граничное условие для сопряженных переменных, т. е.

$$\mathbf{y}(t_1) = \frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_1, t_1) = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_1}. \tag{14.4.10}$$

Таким образом, при выполнении условий решения по методу динамического программирования, а именно при выполнении уравнения Беллмана и граничного условия для этого уравнения, выполняются и условия принципа максимума. Однако из принципа максимума не вытекает выполнение уравнения Беллмана, поскольку в этом случае не требуется вводить предположение о непрерывной дифференцируемости функции оптимального поведения. Кроме того, при численном определении оптимальных управлений эти два метода представляют весьма различные подходы к динамической задаче рационального ведения хозяйства: динамическое программирование приводит к нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных, а принцип максимума — к двум системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Принцип максимума оказывается часто более плодотворным, поскольку он, по существу, разбивает решение уравнения Беллмана на два шага: на первом шаге оптимальные управления определяются как функции сопряженных переменных,

а на втором сопряженные переменные определяются как функции времени. Первый шаг обычно не вызывает затруднений; он часто позволяет увидеть свойства решения, а это может подсказать и способ решения задачи. Второй шаг оказывается более трудным, так как приходится решать двухточечную граничную задачу. С другой стороны, в динамическом программировании оба эти шага требуется осуществить одновременно, решая уравнение Беллмана. Поэтому при аналитическом решении подход принципа максимума обычно более полезен, чем подход динамического программирования. Однако при численном решении оба метода приводят к сходным машинным программам и к тем же проблемам, связанным с объемом памяти машины («проклятие размерности»), поскольку в динамическом программировании требуется найти приближенное решение нелинейного дифференциального уравнения в частных производных, а метод принципа максимума требует определения приближенного решения двухточечной граничной задачи [1].

14.5. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих использование принципа максимума при решении задач управления. В качестве первого примера обратимся к линейной задаче об оптимальном (минимальном) времени перехода от заданных начальных значений фазовых координат к определенным конечным значениям при условии, что уравнения движения линейные и автономные. Для простоты рассмотрим лишь задачу с одной фазовой координатой $r = 1$, которая может принимать значения в пределах от -1 до $+1$.

Задача имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} \max_{\{u(t)\}} J = -\int_{t_0}^{t_1} dt = -(t_1 - t_0) \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\ \mathbf{u} \\ t_0 \text{ и } \mathbf{x}(t_0) \text{ заданы} \\ \mathbf{x}(t_1) \text{ задан} \\ -1 \leqslant u(t) \leqslant 1 \text{ и } u(t) \text{ кусочно-непрерывны.} \end{gathered} \tag{14.5.1}$$

[1] Численное решение двухточечной граничной задачи рассматривается в книге под ред. Балакришнана и Нойштадта [12].

Функция Гамильтона в этом случае является линейной относительно фазовой координаты

$$H = -1 + \mathbf{y}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u). \qquad (14.5.2)$$

Оптимальным управлением, согласно принципу максимума, является

$$u^* = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}, \text{ если } \mathbf{y}\mathbf{b} \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} 0, \qquad (14.5.3)$$

$$\text{т. е.} \quad u^* = \operatorname{sgn}(\mathbf{y}\mathbf{b})^1. \qquad (14.5.4)$$

Здесь $\operatorname{sgn} z$ — это сигнум-функция, т. е.

$$\operatorname{sgn} z = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}, \qquad z \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} 0. \qquad (14.5.5)$$

Таким образом, оптимальное управление в любой момент времени лежит на границе множества управлений и с течением времени может происходить переключение управления с одной граничной точки на другую. Такое решение называется *релейным управлением*. Тот факт, что решение задачи (14.5.1) совпадает с решением задачи, в которой управляющий параметр может принимать только два значения ($+1$ и -1), называется *принципом оптимального релейного управления* [2]. Функция $\mathbf{y}\mathbf{b}$ называется *функцией переключения*, поскольку при изменении знака функции $\mathbf{y}\mathbf{b}$ оптимальное управление может переключаться с $+1$ на -1 (или наоборот). Функция времени для сопряженной переменной, которая определяет функцию переключения, отыскивается из дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{y}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{y}\mathbf{A}. \qquad (14.5.6)$$

Если характеристические корни матрицы A порядка $n \times n$ являются различными, вещественными и отрицательными, то существует такое оптимальное управление, при котором происходит $n-1$ переключение. Иначе говоря, временной промежуток $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ можно разделить на n интервалов, в каждом из которых оптимальное управление принимает либо максимальное значение ($u^* = 1$), либо минимальное значение ($u^* = -1$) [1].

В качестве частного случая приведенной выше задачи рассмотрим задачу о минимальном времени перехода, управляющим параметром в которой является вторая производная единственной фазовой координаты

$$u = \ddot{x}_1 = \frac{d^2x_1}{dt^2}. \qquad (14.5.7)$$

Приведем соответствующий физический пример: будем считать u силой, приложенной к массе, величина которой равна единице, а x_1 будем считать мерой расстояния этой массы до некоторой фиксированной точки. Уравнения (14.5.7) показывают, что сила u равна массе (равной единице), умноженной на ускорение ($\ddot{x}_1$). Поскольку в формулировку общей задачи управления входят только первые производные, то будет удобнее представить (14.5.7) либо в виде двух уравнений движения

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u, \end{aligned} \qquad (14.5.8)$$

---

[1] Отметим, что u^* не определено в точках, где $\mathbf{y}\mathbf{b} = 0$. Задача называется *вырожденной*, если это условие выполняется на протяжении конечного промежутка времени. См. работы Атанса и Фалба [2], Келли, Коппа и Мойера [13].

[2] См. работы Беллмана, Гликсберга и Гросса [14, 15], Ласалля [16], Халкина [17]. Принцип оптимального релейного управления имеет важное значение в технических приложениях, в которых обычно выгоднее обеспечить способность системы находиться в крайних состояниях, нежели и в крайних и во всех промежуточных состояниях. Например, термостат в отопительной системе здания, который либо включает, либо выключает обогревающее устройство, является более экономичным, чем термостат, регулирующий интенсивность работы обогревающего устройства.

[1] См. [14, 15, 18, 19, 20, 16, 11]. Отметим, что если характеристические корни матрицы **A** вещественные и отрицательные, то система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

является устойчивой, а система

$$\dot{y} = -\mathbf{A}\mathbf{y}$$

является неустойчивой, так как характеристические корни $-\mathbf{A}$ вещественные и положительные. Это свойство, называемое двойственной (дуальной) неустойчивостью, сильно увеличивает трудности решения двухточечной граничной задачи, так как малые ошибки в $\mathbf{y}$ значительно возрастают при интегрировании сопряженных дифференциальных уравнений от начального момента, а малые ошибки в $\mathbf{x}$ значительно возрастают при интегрировании дифференциальных уравнений состояния (уравнений движения) начиная с конечного момента времени. В работах Солоу [21] и Джоргенсона [22] двойственная неустойчивость рассматривается в связи с динамическими экономическими моделями «затраты — выпуск», в которых либо система уравнений для определения выпусков, либо система уравнений для определения цен является неустойчивой.

либо, прибегая к обозначениям, применяемым в общих линейных уравнениях движения (14.5.1), в виде

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}. \tag{14.5.9}$$

Пусть задача состоит в том, чтобы перевести фазовые координаты точки от заданных начальных значений $(x_1(t_0),\ x_2(t_0))'$ в начало координат $(0,\ 0)'$ за минимальное время. Функция Гамильтона имеет вид

$$H=-1+y_1x_2+y_2u. \tag{14.5.10}$$

Следовательно, согласно принципу максимума,

$$u^*=\operatorname{sgn}(y_2). \tag{14.5.11}$$

Дифференциальные уравнения для сопряженных переменных таковы:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1&=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=0\\ \dot{y}_2&=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-y_1.\end{aligned} \tag{14.5.12}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}y_1&=c_1\\ y_2&=-c_1t+c_2,\end{aligned} \tag{14.5.13}$$

где c_1 и c_2 — константы, определяемые из начальных условий. Так как y_2 может изменить знак не более одного раза, то оптимальное решение требует не более одного переключения управляющего параметра. Этот вывод согласуется с приведенным выше общим принципом, устанавливающим максимальное число необходимых переключений.

Используя фазовую плоскость для переменных x_1 и $x_2=\dot{x}_1$, можно дать изящную иллюстрацию решения этой задачи. Согласно принципу оптимального релейного управления, следует рассматривать только $u=1$ и $u=-1$. Если $u=1$, то из уравнений движения следует, что

$$x_1=\frac{1}{2}x_2^2+c,\quad c=\text{const}, \tag{14.5.14}$$

а если $u=-1$, то

$$x_1=-\frac{1}{2}x_2^2+c,\quad c=\text{const}. \tag{14.5.15}$$

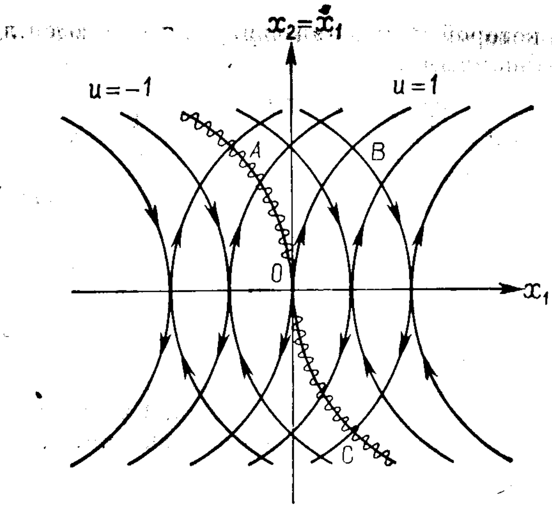

Рис. 14.2. Решение задачи об оптимальном быстродействии на фазовой плоскости. Управляющий параметр — вторая производная фазовой координаты.

На рис. 14.2 изображены некоторые из этих кривых: управлению $u=1$ соответствуют кривые с направленными вверх стрелками (в этом случае $x_2=\dot{x}_1$ возрастает), а управлению $u=-1$ соответствуют кривые с направленными вниз стрелками (в этом случае $x_2=\dot{x}_1$ уменьшается). Оптимальную траекторию перехода фазовой точки из любого положения в некоторое другое положение, например в начало координат, составляет перемещение вдоль одной или двух из указанных кривых. Если начальная точка лежит на меченой волнистой линии, то переключений не требуется, если же начальная точка не принадлежит этой линии, то оптимальное управление содержит одно переключение. Например, при переходе из точки A в начало координат переключений не требуется ($u=-1$), а при переходе из точки B в начало координат требуется одно переключение, а именно переключение с $u=-1$ на $u=+1$ в точке C.

В качестве второго примера применения принципа максимума рассмотрим задачу управления по минимуму энергии, в которой уравнения движения являются линейными и автономными:

$$\max_{\{\mathbf{u}(t)\}} J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}+\mathbf{u}'\mathbf{E}\mathbf{u})\,dt+\frac{1}{2}\mathbf{x}_1'\mathbf{F}\mathbf{x}_1$$

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u} \qquad (14.5.16)$$

$$\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{x}(t_1)=\mathbf{x}_1.$$

Здесь $\mathbf{D}$ и $\mathbf{F}$ — заданные отрицательно определенные матрицы порядка n, $\mathbf{E}$ — заданная отрицательно определенная матрица порядка r, а $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — заданные матрицы размерности $n\times n$ и $n\times r$ соответственно. Будем предполагать, что $\mathbf{u}$ может принимать любые значения, т. е. $\Omega = E^r$.

Функция Гамильтона имеет вид

$$H=\frac{1}{2}(\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}+\mathbf{u}'\mathbf{E}\mathbf{u})+\mathbf{y}(\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}). \qquad (14.5.17)$$

Согласно принципу максимума,

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}=\mathbf{u}'\mathbf{E}+\mathbf{y}\mathbf{B}=0, \qquad (14.5.18)$$

следовательно, оптимальным управлением является линейная функция сопряженных переменных

$$\mathbf{u}^*=-\mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{y}'. \qquad (14.5.19)$$

Канонические уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}&=\frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}=\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{B}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{y}',\ \mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0\\ \dot{\mathbf{y}}&=-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}=-\mathbf{x}'\mathbf{D}-\mathbf{y}\mathbf{A},\ \mathbf{y}(t_1)=\mathbf{x}_1'\mathbf{F}.\end{aligned} \qquad (14.5.20)$$

Рассмотрим линейное решение в форме

$$\mathbf{y}=\mathbf{x}'\mathbf{Q}(t), \qquad (14.5.21)$$

где $\mathbf{Q}$ — матрица размерности $n\times n$ с элементами, зависящими от времени. Матрицу $\mathbf{Q}(t)$ найдем из уравнения Рикатти

$$\dot{\mathbf{Q}}-\mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{Q}+\mathbf{Q}\mathbf{A}+\mathbf{A}'\mathbf{Q}+\mathbf{D}=0 \qquad (14.5.22)$$

с граничными условиями

$$\mathbf{Q}(t_1)=\mathbf{F}. \qquad (14.5.23)$$

Таким образом, оптимальным управлением по замкнутому контуру является

$$\mathbf{u}^*(t)=-\mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{Q}'(t)\,\mathbf{x}(t). \qquad (14.5.24)$$

Следовательно, оптимальные управления в задаче управления по минимуму энергии с линейными автономными уравнениями движения являются линейными функциями фазовых координат. Этот результат представляет собой распространение на динамические задачи правила линейного решения задач математического программирования, согласно которому решение задачи с квадратичной целевой функцией и линейными ограничениями является линейным.

ЗАДАЧИ

14-А. Используя подход, развитый в разделе 14.1, докажите, что в задачах с заданной конечной поверхностью

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}(t),t)=0 \text{ при } t=t_1,$$

условие трансверсальности для принципа максимума состоит в следующем:

$$\left(\mathbf{H}|_{t_1}+\frac{\partial F}{\partial t_1}\right)+\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_1}-\mathbf{y}\right)\left(\frac{d\mathbf{x}}{\partial t}\right)\Big|_{\mathbf{T}(\cdot\cdot)=0}=0.$$

14-Б. Используя принцип максимума, покажите, что уравнение Эйлера для такой задачи вариационного исчисления с одной фазовой координатой, в которую в явной форме входит управляющий параметр, имеет вид

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \mathbf{x}}-\frac{\partial I/\partial u}{\partial f/\partial u}\frac{\partial f}{\partial x}\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I/\partial u}{\partial f/\partial u}\right)=0.$$

14-В. Покажите, что оптимальные управления, полученные методом принципа максимума, удовлетворяют принципу оптимальности: если $\{\mathbf{u}^*(t)\}$ — оптимальное управление, а $\{\mathbf{x}^*(t)\}$ — соответствующая оптимальная траектория при ($t_0\leqslant t\leqslant t_1$, $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$), то $\{\mathbf{u}(t)\}$ при $\tau\leqslant t\leqslant t_1$ является оптимальным управлением для задач с начальным моментом времени τ и начальным состоянием $\mathbf{x}^*(\tau)$.

14-Г. В указанной ниже задаче управления x является единственной фазовой координатой, а u — единственным управляющим параметром

$$\max J=\int_0^2 (2x-3u-\alpha u^2)\,dt$$

$$\dot{x}=x+u$$
$$x(0)=5$$
$$0\leqslant u\leqslant 2.$$

Используя принцип максимума, найдите оптимальное управление при $\alpha=0$ и при $\alpha=1$.

14-Д. Используя принцип максимума, решите следующую задачу управления:

$$\max J=\int_0^1 (x_1^2-u^2)\,dt$$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u$$
$$x_1(0)=x_2(0)=1$$
$$x_1(1)=x_2(1)=0.$$

14-Е. Решите приведенную ниже задачу Майера с помощью принципа максимума.

$$\max 8x_1(18)+4x_2(18)$$
$$\dot{x}_1=2x_1+x_2+u$$
$$\dot{x}_2=4x-2u$$
$$x_1(0)=x_{10}$$
$$x_2(0)=x_{20}$$
$$0\leqslant u\leqslant 1.$$

14-Ж. Рассмотрите задачу о минимальном времени перехода, в которой управляющим параметром является вторая производная фазовой координаты. Покажите, что время, необходимое для перемещения из $(x_1,\ x_2)'$ в начало координат, определяется следующими выражениями:

$$\left\{\begin{matrix} x_2+\sqrt{4x_1+2x_2^2}\\ -x_2+\sqrt{-4x_1+2x_2^2}\\ |x_2|\end{matrix}\right\},\ \text{если}\ x_1\left\{\begin{matrix}>\\<\\=\end{matrix}\right\}-\frac{1}{2}x_2|x_2|.$$

14-З. Решите задачи об оптимальном быстродействии, в которых требуется за минимальное время достичь начала координат. Уравнения движения и множества управлений указаны ниже.

1. $\ddot{x}+2b\dot{x}+x=u$
   $|u|\leqslant 1$
2. $\dot{x}_1=u_1x_2$
   $\dot{x}_2=u_2$
   $|u_1|\leqslant 1,\ |u_2|\leqslant 1$
3. $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\ t)+\mathbf{u}$
   $\sum\limits_{j=1}^{r} u_j^2\leqslant 1.$

14-И. Решите задачу

$$\max_{\{u(t)\}} J=-\int_{t_0}^{t_1}|u|\,dt$$
$$\ddot{x}=u$$
$$x(t_0)=x_0$$
$$x(t_1)=x_1$$
$$|u|\leqslant 1.$$

14-К. Решите задачу

$$\max J=-\int_0^1 u^2\,dt$$
$$\dot{x}=x=u$$
$$x(0)=1$$
$$x(1)=0.$$

Покажите, что оптимальное управление меняется во времени по экспоненте.

14-Л. Используя принцип максимума, докажите, что кратчайшее расстояние от фиксированной точки до заданной линии равно длине перпендикуляра, проведенного к линии из этой точки.

14-М. Расстояние между Бостоном и Вашингтоном составляет 400 миль. В настоящее время строится сверхскоростной поезд для перевозки пассажиров, который будет курсировать между этими двумя городами.

1. Какой может быть кратчайшая продолжительность поездки, если накладывается единственное ограничение: максимальное допустимое ускорение равно $2g$, где g — ускорение свободного падения, равное 9,8 м/сек²?

2. Какой может быть кратчайшая продолжительность поездки, если в дополнение к ограничению на ускорение скорость не должна превосходить 360 миль/час ($=528$ фут/сек, $g=32$ фут/сек²)?

14-Н. Автомобиль поднимается вверх по горе, имеющей осевую симметрию. Высота горы равна h. Скорость автомобиля v зависит от угла наклона α, причем $v(\alpha)$ и $dv/d\alpha$ являются монотонно убывающими функциями и $v(0) = v_0$; $v(\pi/2)=0$. Найдите путь, двигаясь по которому автомобиль достигнет вершины за минимальное время [23].

14-О. Лодка движется с постоянной скоростью, равной единице, в потоке, движущемся с постоянной скоростью s. Найти оптимальный угол курса, при котором лодка проходит расстояние между двумя заданными точками за минимальное время [4]. Если оси координат x_1 и x_2 соответствуют движению лодки параллельно потоку и перпендикулярно к нему, а θ — угол курса, то уравнения движения имеют вид

$$\dot{x}_1 = s + \cos\theta$$
$$\dot{x}_2 = \sin\theta.$$

14-П. Предположим, что в некоторой стране в момент времени t имеется $S(t)$ ученых, работающих либо как преподаватели, либо как исследователи. Число ученых-преподавателей равно $E(t)$, число исследователей $R(t)$ и $S(t) = E(t) + R(t)$. Благодаря работе ученых-преподавателей подготавливаются новые ученые, причем требуется $1/\gamma$ преподавателей для того, чтобы подготовить за один год одного нового ученого. Ученые прекращают научную деятельность с темпом, равным δ в год. Следовательно,

$$\dot{S}(t) = \gamma E(t) - \delta S(t).$$

Соответствующие параметры для США оцениваются следующим образом: $\gamma = 0{,}14$, $\delta = 0{,}02$. С помощью различных средств можно влиять на величину $\alpha(t)$ — долю ученых-преподавателей. Выполняются соотношения

$$\dot{E}(t) = \alpha(t)\gamma E(t) - \delta E(t)$$
$$\dot{R}(t) = (1-\alpha(t))\gamma E(t) - \delta R(t)$$
$$0 \leqslant \bar{\alpha} \leqslant \alpha(t) \leqslant \bar{\bar{\alpha}} < 1.$$

Определите, каким должно быть оптимальное распределение ученых, если цель состоит в том, чтобы число преподавателей и число исследователей достигли заданных уровней за минимальное время [24].

14-Р. Найдите оптимальную политику в области рекламной деятельности, которая стимулирует объем продаж данного продукта за некоторый период времени при следующих условиях: скорость изменения объема продаж уменьшается пропорционально объему продаж и увеличивается пропорционально уровню рекламной деятельности в той части рынка, которая еще этим продуктом не насыщена. Задача имеет вид

$$\max_{\{A(t)\}} \int_{t_0}^{t_1} S(t)\,dt$$
$$\dot{S} = -aS + bA\left[1 - \frac{S}{M}\right]$$
$$S(t_0) = S_0$$
$$0 \leqslant A(t) \leqslant \bar{A},$$

где S — объем продаж; A — уровень рекламной деятельности; M — емкость рынка, а t_0, t_1, a, b, S_0, $\bar{A}$ — заданные положительные параметры [25].

14-С. Пусть в предыдущей задаче эффект от рекламной деятельности со временем накапливается следующим образом:

$$\dot{S} = -aS + b\int_0^\infty A(t-\tau)\,e^{-\tau}\,d\tau.$$

Покажите, что это уравнение можно записать в виде дифференциального уравнения второго порядка с помощью замены переменных $X = t - \tau$. Решите задачу, представив это уравнение второго порядка в виде двух уравнений первого порядка и используя принцип максимума [25].