Глава 12

Вариационное исчисление

Начнем рассмотрение основных направлений в теории решения задач управления с методов вариационного исчисления [1]. Задача управления в классическом вариационном исчислении состоит в следующем: среди множества функций времени — фазовых траекторий,— соединяющих две фиксированные точки, соответствующие начальному и конечному моментам времени, требуется выбрать функцию, максимизирующую некоторый интеграл от заданной функции, которая зависит от фазовой координаты, скорости изменения фазовой координаты и времени. Таким образом, *классическая задача вариационного исчисления* имеет вид

$$\max_{\{x(t)\}} J = \int_{t_0}^{t_1} I(x(t), \dot{x}(t), t)\, dt$$
$$x(t_0) = x_0 \tag{12.0.1}$$
$$x(t_1) = x_1,$$

где J, $(x, \dot{x}, t)$ — фиксированная непрерывно дифференцируемая функция, а t_0, t_1, x_0, x_1 — фиксированные параметры. Эту задачу можно рассматривать как частный случай общей задачи управления (11.1.21), в которую не входит функция конечных параметров (задача Лагранжа). Задача зависит от одной фазовой координаты и от одного управляющего параметра — скорости изменения фазовой координаты. Уравнение движения в этом случае имеет вид

$$\dot{x} = u, \tag{12.0.2}$$

[1] Основная литература по вариационному исчислению [1, 2, 3, 4].

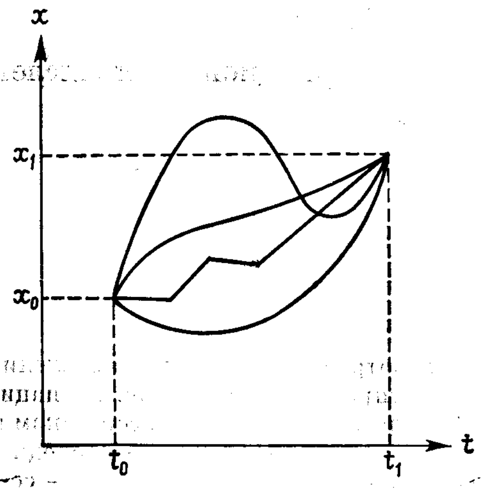

Рис. 12.1 Несколько альтернативных допустимых траекторий.

так что $\dot{x}$ в $I(\cdot\cdot\cdot)$ заменяет u, а управляющий параметр может принимать любое значение, т. е.

$$\Omega = E. \qquad (12.0.3)$$

Следовательно, управление должно отвечать единственному условию — быть кусочно-непрерывной функцией времени. Любая траектория $\{x(t)\}$ называется *допустимой*, если она удовлетворяет граничным условиям из 12.0.1 и следующему условию непрерывности: $x(t)$ — непрерывная, а $\dot{x}(t)$ — кусочно-непрерывная функции времени.

Классическая задача вариационного исчисления состоит в выборе допустимой траектории, которая максимизирует интегральный целевой функционал. На рис. 12.1 изображены несколько альтернативных допустимых траекторий.

Классическую задачу вариационного исчисления можно рассматривать как динамический аналог классической задачи математического программирования. Замена u на $\dot{x}$ в целевом функционале аналогична замене переменных в целевой функции после разрешения ограничений-равенств, которая производится в классических задачах математического программирования. Кроме того, если введение ограничений-неравенств в статических задачах привело

к созданию современных методов линейного и нелинейного программирования, то исследование ограничений-неравенств в динамических задачах привело к разработке динамического программирования, принципа максимума и обогатило вариационное исчисление новыми подходами.

12.1. УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА

Решением задачи вариационного исчисления (12.0.1) называется допустимая траектория $\{x(t)\}$, на которой достигается максимальное значение интегрального целевого функционала. Если такое решение существует, то оно должно удовлетворять некоторым необходимым условиям, которые можно считать динамическими аналогами необходимых условий в классических задачах математического программирования при отсутствии ограничений. Необходимым условием, аналогичным условию первого порядка — обращению в нуль первой производной,— является выполнение *уравнения Эйлера*.

Необходимые условия в классических задачах математического программирования были получены при рассмотрении небольших изменений решения, которым в этом случае являлась точка евклидова пространства. Необходимые условия для решения классической задачи вариационного исчисления можно получить сходным методом, варьируя в малых пределах траекторию, являющуюся решением, т. е. рассматривая малые изменения этой траектории. Пусть траектория $\{x(t)\}$ является решением. Проварьируем траекторию решения, т. е. рассмотрим траекторию $\{z(t)\}$, близкую к $\{x(t)\}$,

$$z(t) = x(t) + \varepsilon\eta(t), \qquad (12.1.1)$$

где $\eta(t)$ — произвольная функция с кусочно-непрерывной производной, у которой

$$\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0. \qquad (12.1.2)$$

Проварьированная функция $\{z(t)\}$ удовлетворяет как граничным условиям, так и условиям непрерывности и, следовательно, является допустимой траекторией. Параметр ε измеряет «разность» между траекторией решения

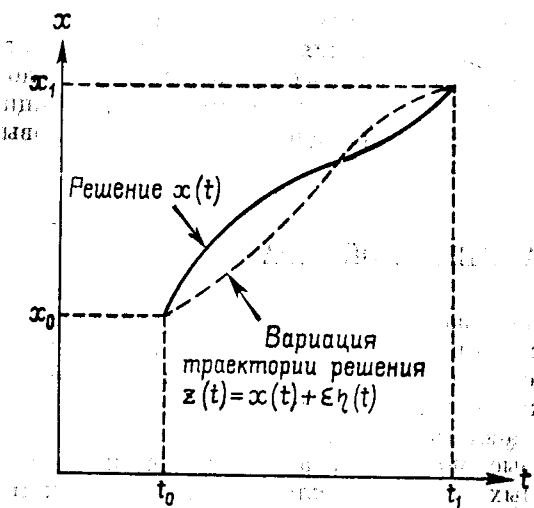

Рис. 12.2. Изменение (варьирование) траектории решения.

$\{x(t)\}$ и проварьированной траекторией $\{z(t)\}$, причем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\{z(t)\}=\{x(t)\}. \qquad (12.1.3)$$

Эти две траектории изображены на рис. 12.2.

Значение целевого функционала на $\{z(t)\}$ можно рассматривать как функцию от ε

$$J(\varepsilon)=\int_{t_0}^{t_1} I(x+\varepsilon\eta,\ \dot{x}+\varepsilon\dot{\eta},\ t)\,dt. \qquad (12.1.4)$$

Так как $\{x(t)\}$ является решением, то $J(\varepsilon)$ достигает максимума при $\varepsilon=0$, следовательно,

$$\frac{dJ}{d\varepsilon}(0)=0. \qquad (12.1.5)$$

Однако

$$\frac{dJ}{d\varepsilon}(0)=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial I}{\partial x}\eta+\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}\right)dt. \qquad (12.1.6)$$

Применяя ко второму члену подынтегрального выражения правило интегрирования по частям, получим

$$\frac{dJ}{d\varepsilon}(0)=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial I}{\partial x}\eta\,dt+\left[\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\eta\right]_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right)\eta\,dt, \qquad (12.1.7)$$

а так как выполняются граничные условия (12.1.2), то

$$\frac{dJ}{d\varepsilon}(0)=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial I}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right)\right]\eta\,dt=0. \qquad (12.1.8)$$

Для того чтобы этот интеграл обращался в нуль при любых $\eta(t)$, удовлетворяющих граничным условиям и условию непрерывности, необходимо, чтобы

$$\frac{\partial I}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right)=0 \qquad (12.1.9)$$

при всех t ($t_0\leqslant t\leqslant t_1$). Действительно, в противном случае можно было бы взять функцию $\eta(t)$, не равную нулю именно в тех точках, где не равно нулю выражение, стоящее в квадратных скобках в (12.1.8). Тогда интеграл в (12.1.8) не мог бы быть равным нулю. Доказанное положение называют обычно *основной леммой вариационного исчисления.*

Уравнение (12.1.9) называется уравнением Эйлера [1].

---

[1] В другом доказательстве необходимости выполнения уравнения Эйлера используется прием аппроксимации функции с помощью разбиения интервала на конечное число промежутков, изложенный в разделе 11.4. Разделив данный временной интервал на N промежутков равной длины Δ, рассмотрим

$$J^N=\sum_{q=0}^{N-1} I(x^q,\ u^q,\ t^q)\,\Delta$$

$$t^q=t_0+q\Delta$$

$$x^q=x(t^q)$$

$$u^q=\frac{x^q-x^{q-1}}{\Delta},$$

где

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{N\to\infty\\ \Delta\to 0}} J^N=J\\ N\Delta=(t_1-t_0).\end{array}\right.$$

Для того чтобы функция J^N достигала максимума на x^q, необходимо, чтобы

$$\frac{\partial J^N}{\partial x^q}=0.$$

Раскрывая полную производную по t от $\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}$, которая является функцией от x, $\dot{x}$ и t, можно записать это уравнение в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial^2 I}{\partial \dot{x}^2}\right)\frac{d^2 x}{dt^2}+\left(\frac{\partial^2 I}{\partial x\,\partial \dot{x}}\right)\frac{dx}{dt}+\left(\frac{\partial^2 I}{\partial t\,\partial \dot{x}}-\frac{\partial I}{\partial x}\right)=0. \quad (12.1.10)$$

Отсюда видно, что уравнение Эйлера представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Граничные условия, соответствующие этому уравнению, те же, что в исходной задаче

$$\begin{aligned} x(t_0)&=x_0\\ x(t_1)&=x_1. \end{aligned} \quad (12.1.11)$$

Любая траектория $\{x(t)\}$, удовлетворяющая уравнению Эйлера (12.1.9) при всех t ($t_0 \leqslant t \leqslant t_1$) граничным условиям (12.1.11), называется *экстремалью*. Если классическая задача вариационного исчисления имеет решение, то оно необходимо является экстремалью.

Подынтегральная функция $I(x, \dot{x}, t)$ в общем случае зависит от трех переменных. Если же эта функция не зависит явно от $\dot{x}$, то уравнение Эйлера принимает вид

$$\frac{\partial I}{\partial x}=0. \quad (12.1.12)$$

Это условие совпадает по форме с необходимым условием экстремума в классической задаче математического про-

---

Преобразуем выражение для $\frac{\partial J^N}{\partial x^q}$ следующим образом:

$$\frac{\partial J^N}{\partial x^q}=\frac{\partial}{\partial x^q}\left[I\left(x^{q-1}, \frac{x^q-x^{q-1}}{\Delta}, t^{q-1}\right]+I\left(x^q, \frac{x^{q+1}-x^q}{\Delta}, t^q\right)\right]\cdot\Delta=$$

$$=0=\left[\frac{\partial I}{\partial u^{q-1}}\cdot\frac{1}{\Delta}+\frac{\partial I}{\partial x^q}-\frac{\partial I}{\partial u^q}\cdot\frac{1}{\Delta}\right]\Delta=0=$$

$$=\left[\frac{\partial I}{\partial x^q}-\left\{\frac{\frac{\partial I}{\partial u^q}-\frac{\partial I}{\partial u^{q-1}}}{\Delta}\right\}\right]\Delta=0.$$

Переходя к пределу при $N\to\infty$, $\Delta\to 0$, $x^q\to x$, $u^q\to\dot{x}$, получим уравнение Эйлера

$$\frac{\partial I}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right)=0.$$

граммирования при отсутствии ограничений. Такая динамическая задача является, по существу, только обобщением классических задач статической оптимизации с конечным числом переменных на случай бесконечного числа переменных. Если подынтегральная функция не зависит явно от x, то уравнение Эйлера принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right)=0. \quad (12.1.13)$$

Непосредственным интегрированием получаем

$$\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}=\text{const}. \quad (12.1.14)$$

Наконец, если подынтегральная функция не зависит явно от t, то уравнение Эйлера всегда можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\left(I-\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)-\frac{\partial I}{\partial t}=0. \quad (12.1.15)$$

Отсюда следует, что

$$I-\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\dot{x}=\text{const}. \quad (12.1.16)$$

Примером задачи, подынтегральная функция которой не зависит от фазовой координаты x, может служить доказательство того, что кратчайшей плоской кривой, соединяющей две точки, является отрезок прямой. Пусть t обозначает здесь не время, а расстояние. Требуется отыскать кратчайший путь, соединяющий $x(t_0)=x_0$ и $x(t_1)=x_1$. Так как дифференциал длины кривой ds равен $\sqrt{dt^2+dx^2}$ или $\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt$, то расстояние между точками равно

$$\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt \quad (12.1.17)$$

Следовательно

$$I(x, \dot{x}, t)=-\sqrt{1+\dot{x}^2}. \quad (12.1.18)$$

Эта функция явно не содержит x. Согласно 12.1.14, уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial I}{\partial \dot{x}} = \frac{-\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = \text{const}. \tag{12.1.19}$$

Отсюда следует, что $\dot{x}$ является постоянной величиной. Следовательно, $x(t)$ должна быть линейной функцией

$$x(t) = c_1 t + c_2. \tag{12.1.20}$$

Значения постоянных c_1 и c_2 определяются из граничных условий

$$c_1 = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}, \quad c_2 = \frac{x_0 t_1 - x_1 t_0}{t_1 - t_0}. \tag{12.1.21}$$

Таким образом, используя теорему Эйлера, мы доказали, что кратчайшим путем на плоскости, соединяющим две точки, является отрезок прямой.

12.2. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ

Уравнение Эйлера — это необходимое условие, аналогичное условию первого порядка (обращению в нуль производной) в статических задачах. Ряд других необходимых условий, которым должно удовлетворять решение задачи классического вариационного исчисления, можно установить по аналогии с соответствующими условиями для классических задач математического программирования в статике.

Необходимому условию второго порядка для статических задач в вариационном исчислении соответствует *условие Лежандра*, заключающееся в том, что решение $\{x(t)\}$ должно удовлетворять неравенству

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \dot{x}^2} \leqslant 0 \tag{12.2.1}$$

при всех t $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$. Этот вывод следует из необходимого условия второго порядка

$$\frac{d^2 J}{d\varepsilon^2}(0) \leqslant 0 \tag{12.2.2}$$

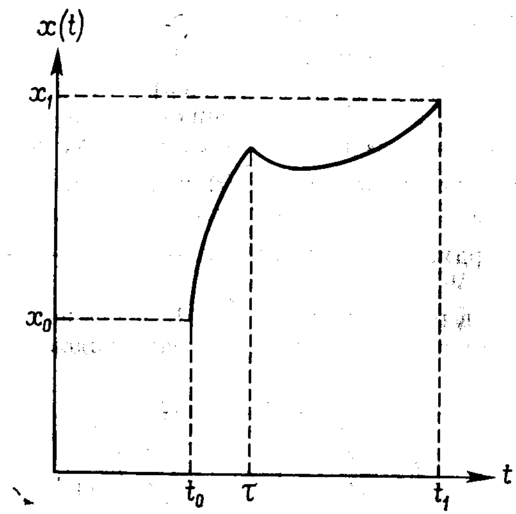

Рис. 12.3. Точка излома при $t = \tau$.

для существования максимума функции $J(\varepsilon)$ из 12.1.4 при $\varepsilon = 0$, что можно доказать, проварьировав траекторию решения.

Условие Вейерштрасса: если $\{x(t)\}$ — траектория решения, а $\{z(t)\}$ — любая другая допустимая траектория, то

$$E(x, \dot{x}, t, \dot{z}) \leqslant 0, \tag{12.2.3}$$

где функция $E(\cdot\cdot\cdot\cdot)$ определена следующим образом:

$$E(x, \dot{x}, t, \dot{z}) = I(x, \dot{z}, t) - I(x, \dot{x}, t) - \frac{\partial I}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x}, t)(\dot{z} - \dot{x}). \tag{12.2.4}$$

Эта функция называется *функцией Вейерштрасса*. Условие Вейерштрасса аналогично условию вогнутости целевой функции в статическом случае. Если функция $I(x, \dot{x}, t)$ является вогнутой относительно управляющего параметра $\dot{x}$, то условие Вейерштрасса выполнено.

Последние из приводимых здесь необходимых условий — *условия Вейерштрасса—Эрдмана* для точки излома допустимой траектории. Эти условия не имеют прямой аналогии в статических задачах, поскольку они существенным образом зависят от времени. Хотя фазовая траектория $\{x(t)\}$ является непрерывной, однако управление $\{\dot{x}(t)\}$ должно быть только кусочно-непрерывной функцией. Следовательно, эта функция может в действительности состоять из «кусков» непрерывных кривых, соединенных точками *излома*, в которых $\dot{x}(t)$ разрывна. Функция на рис. 12.3 имеет точку излома при $t=\tau$. Условия Вейерштрасса — Эрдмана требуют, чтобы $\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}$ и $\left(I-\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)$ были непрерывны в точках излома $\{\dot{x}(t)\}$. Следовательно, если моменту времени τ соответствует точка излома, то

$$\left[\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right]_{\tau-}=\left[\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right]_{\tau+}$$
$$\left[I-\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right]_{\tau-}=\left[I-\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right]_{\tau+}, \tag{12.2.5}$$

где

$$\left[\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right]_{\tau-}=\lim_{\substack{t\to\tau\\ t<\tau}}\left[\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right]$$
$$\left[\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right]_{\tau+}=\lim_{\substack{t\to\tau\\ t>\tau}}\left[\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right], \tag{12.2.6}$$

т. е. τ- и τ+ обозначают пределы в точке τ слева и справа.

Выше рассматривалась задача с одной фазовой координатой. Задача классического вариационного исчисления с n фазовыми координатами имеет вид

$$\max_{\{\mathbf{x}(t)\}} J=\int_{t_0}^{t_1} I(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t)\,dt$$
$$\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$$
$$\mathbf{x}(t_1)=\mathbf{x}_1, \tag{12.2.7}$$

где $\mathbf{x}(t)$ и $\dot{\mathbf{x}}(t)$ — это векторы-столбцы:

$$\mathbf{x}(t)=(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))'$$
$$\dot{\mathbf{x}}(t)=(\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \ldots, \dot{x}_n(t))'. \tag{12.2.8}$$

Приведем необходимые условия для этого случая.

Уравнение Эйлера: $\frac{\partial I}{\partial \mathbf{x}}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right)=\mathbf{0}$.

Граничные условия: $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}(t_1)=\mathbf{x}_1$. (12.2.9)

Условие Лежандра: матрица $\frac{\partial^2 I}{\partial \dot{\mathbf{x}}^2}$ отрицательно определена или отрицательно полуопределена.

Условия Вейерштрасса:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t, \dot{\mathbf{z}})\leqslant 0$$

Условия Вейерштрасса — Эрдмана: $\frac{\partial I}{\partial \dot{\mathbf{x}}}$ и $I-\frac{\partial I}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\dot{\mathbf{x}}$ являются непрерывными в точке излома.

Здесь

$$\frac{\partial I}{\partial \mathbf{x}}=\left(\frac{\partial I}{\partial x_1}, \frac{\partial I}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial I}{\partial x_n}\right)$$
$$\frac{\partial I}{\partial \dot{\mathbf{x}}}=\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}_1}, \frac{\partial I}{\partial \dot{x}_2}, \ldots, \frac{\partial I}{\partial \dot{x}_n}\right).$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right)=\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}_1}\right), \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}_2}\right), \ldots, \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}_n}\right)\right) \tag{12.2.10}$$
$$\frac{\partial^2 I}{\partial \dot{\mathbf{x}}^2}=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 I}{\partial \dot{x}_1^2} & \frac{\partial^2 I}{\partial \dot{x}_1\,\partial \dot{x}_2} & \ldots & \frac{\partial^2 I}{\partial \dot{x}_1\,\partial \dot{x}_n} \\ \frac{\partial^2 I}{\partial \dot{x}_2\,\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial^2 I}{\partial \dot{x}_2^2} & \ldots & \frac{\partial^2 I}{\partial \dot{x}_2\,\partial \dot{x}_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 I}{\partial \dot{x}_n\,\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial^2 I}{\partial \dot{x}_n\,\partial \dot{x}_2} & \ldots & \frac{\partial^2 I}{\partial \dot{x}_n^2} \end{pmatrix}$$
$$E(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t, \dot{\mathbf{z}})=I(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{z}}, t)-I(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)-\frac{\partial I}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)(\dot{\mathbf{z}}-\dot{\mathbf{x}}).$$

Таким образом, имеется n уравнений Эйлера

$$\frac{\partial I}{\partial x_j}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}_j}\right)=0, \quad j=1, 2, \ldots, n. \tag{12.2.11}$$

12.3. УСЛОВИЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТИ

В рассматривавшейся до сих пор задаче конечный момент времени и конечное состояние были фиксированными. Если конечная точка лежит на заданной поверхности, то условие

$$(\mathbf{x}(t),\ t) \in T \quad \text{при} \quad t = t_1 \qquad (12.3.1)$$

определяет конечный момент времени t_1 и конечное состояние $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$. Пусть конечная поверхность задана с помощью условий

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}(t),\ t) = 0 \quad \text{при} \quad t = t_1, \qquad (12.3.2)$$

где $\mathbf{T}$ — вектор-функция фазовых координат и времени. Необходимые условия и в этом случае можно получить, используя малые изменения решения. Предположим, что в задаче с одной фазовой координатой функция $\{x(t)\}$ есть траектория решения, а $\{z(t)\}$ — изменение траектории, т. е.

$$z(t) = x(t) + \varepsilon\eta(t). \qquad (12.3.3)$$

Траектория решения достигает конечной поверхности в момент t_1, т. е.

$$\mathbf{T}(x(t),\ t) = 0 \quad \text{при} \quad t = t_1, \qquad (12.3.4)$$

а проварьированная траектория решения достигает конечной поверхности в момент $t_1(\varepsilon)$, т. е.

$$\mathbf{T}(z(t),\ t) = 0 \quad \text{при} \quad t = t_1(\varepsilon), \qquad (12.3.5)$$

где

$$\lim_{\varepsilon \to 0} t_1(\varepsilon) = t_1. \qquad (12.3.6)$$

Соответствующая графическая иллюстрация приводится на рис. 12.4. Значение целевого функционала $\{z(t)\}$ является функцией от ε

$$J(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1(\varepsilon)} I(x + \varepsilon\eta,\ \dot{x} + \varepsilon\dot{\eta},\ t)\, dt. \qquad (12.3.7)$$

Так как $J(\varepsilon)$ достигает максимума при $\varepsilon = 0$, что соответствует решению $\{x(t)\}$, то

$$\frac{dJ}{d\varepsilon}(0) = I\Big|_{t_1(\varepsilon)} \frac{dt_1(\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} + \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial I}{\partial x}\eta + \frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}\right) dt = 0. \qquad (12.3.8)$$

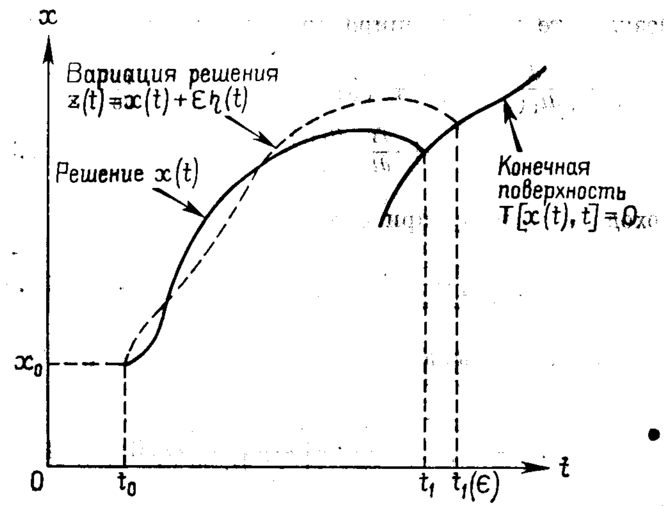

Рис. 12.4. Вариация траектории решения в задаче с фиксированной конечной поверхностью.

Интегрируя по частям, как и ранее, получим, что

$$I\Big|_{t_1(\varepsilon)} \frac{dt_1(\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} + \frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_1(\varepsilon)} \eta(t(\varepsilon)) + \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial I}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right)\right] \eta\, dt = 0. \qquad (12.3.9)$$

Уравнение Эйлера должно выполняться и в этом случае, т. е.

$$\frac{\partial I}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right) = 0, \qquad (12.3.10)$$

следовательно,

$$I\Big|_{t_1(\varepsilon)} \frac{dt_1(\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} + \frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_1(\varepsilon)} \eta(t_1(\varepsilon)) = 0. \qquad (12.3.11)$$

Выражение для производной $dt_1(\varepsilon)/d\varepsilon$ найдем, дифференцируя относительно ε соотношение

$$\mathbf{T}(x(t_1(\varepsilon)) + \varepsilon\eta(t_1(\varepsilon)),\ t_1(\varepsilon)) = 0. \qquad (12.3.12)$$

В результате дифференцирования получаем

$$\frac{\partial T}{\partial x}\left(\frac{dx}{dt_1(\varepsilon)}\frac{dt_1(\varepsilon)}{d\varepsilon}+\eta(t_1(\varepsilon))+\varepsilon\frac{d\eta}{dt_1(\varepsilon)}\frac{dt_1(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)+ \\ +\frac{\partial T}{\partial t}\frac{dt_1(\varepsilon)}{d\varepsilon}=0. \qquad (12.3.13)$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим

$$\frac{\partial T}{\partial x}\left(\frac{dx}{dt_1}\frac{dt_1}{d\varepsilon}+\eta(t_1)\right)+\frac{\partial T}{\partial t}\frac{dt_1}{d\varepsilon}=0. \qquad (12.3.14)$$

Сопоставляя это выражение с (12.3.11), приходим *к условию трансверсальности*

$$\left[I-\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right]_{t_1}\frac{\partial T}{\partial x}-\left[\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right]_{t_1}\frac{\partial T}{\partial t}=0. \qquad (12.3.15)$$

Так как

$$\frac{\partial T}{\partial x}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{T(\cdot\cdot)=0}=-\frac{\partial T}{\partial t}, \qquad (12.3.16)$$

то это условие можно представить как

$$\left[I-\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right]_{t_1}+\left[\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right]_{t_1}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{T(\cdot\cdot)=0}=0. \qquad (12.3.17)$$

В общем случае, когда в задачу входит вектор фазовых координат, условие трансверсальности имеет следующий вид:

$$\left[I-\frac{\partial I}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\dot{\mathbf{x}}\right]_{t_1}+\left[\frac{\partial I}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right]_{t_1}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)_{T(\cdot\cdot)=0}=0, \qquad (12.3.18)$$

ерунда!

где $(d\mathbf{x}/dt)_{T(\cdot\cdot)=0}$ — это градиент, т. е. вектор-столбец, нормальный к конечной поверхности.

12.4. ОГРАНИЧЕНИЯ

Метод вариационного исчисления можно использовать для решения некоторых задач управления с ограничениями. Одним из важных видов ограничений являются интегральные ограничения, когда предполагается, что интеграл некоторой функции равен постоянной величине. Задача с такими ограничениями, называемая обычно *изопериметрической*, имеет следующую форму:

$$\max_{\{(\mathbf{x}t)\}} J=\int_{t_0}^{t_1} I(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},t)\,dt$$
$$\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$$
$$\mathbf{x}(t_1)=\mathbf{x}_1 \qquad (12.4.1)$$
$$K=\int_{t_0}^{t_1} G(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},t)\,dt=c,$$

где $G(\cdots)$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция, а c — заданная постоянная. Задачи такого типа получили свое название по классической задаче отыскания среди кривых с фиксированной длиной (постоянным периметром) такой кривой, которая ограничивает наибольшую площадь. Интегральное ограничение учитывают, вводя множитель Лагранжа y и определяя функционал

$$J'=\int_{t_0}^{t_1}[I(\cdots)+yG(\cdots)\,dt. \qquad (12.4.2)$$

Необходимые условия в данном случае являются условиями существования максимума функционала на траекториях $\{x(t)\}$ и условиями существования минимума относительно множителя Лагранжа y. Например, уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\Big(I(\cdots)+yG(\cdots)\Big)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(I(\cdots)+yG(\cdots))\right)=0. \qquad (12.4.3)$$

Это уравнение вместе с граничными условиями и ограничением определяет решение.

Для изопериметрических задач выполняется важный *принцип взаимности*, согласно которому, если $\mathbf{x}(t)$ максимизирует J при условии, что K равно постоянной величине, то $\mathbf{x}(t)$ минимизирует K при условии, что J равно постоянной величине. Например, кривая постоянной длины, ограниченная площадь которой максимальна, является также кривой с минимальной длиной, ограничивающей заданную площадь. Такой кривой является окружность.

Другой важный вид ограничений составляют ограничения в форме равенств, связывающих фазовые координаты, скорости их изменения и время. Задача в этом случае имеет вид

$$\max_{\{\mathbf{x}(t)\}} J=\int_{t_0}^{t_1} I(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)\, dt$$

$$\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0 \tag{12.4.4}$$

$$\mathbf{x}(t_1)=\mathbf{x}_1$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)=\mathbf{b},$$

где $\mathbf{g}(\cdots)$ — заданный вектор-столбец, составленный из r функций, а $\mathbf{b}$ — заданный вектор-столбец. Предполагается, что $n > r$. Разность $n-r$ называется *числом степеней свободы* задачи. Предполагается также, что ранг матрицы Якоби

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}=\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial g_1}{\partial \dot{x}_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial \dot{x}_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \dot{x}_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial \dot{x}_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial g_r}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial g_r}{\partial \dot{x}_2} & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial \dot{x}_n} \end{pmatrix} \tag{12.4.5}$$

равен количеству ее строк во всех точках траектории решения. Эти предположения полностью аналогичны соответствующим предположениям в классических задачах математического программирования. Задача решается с помощью r множителей Лагранжа

$$\mathbf{y}=(y_1, y_2, \ldots, y_r). \tag{12.4.6}$$

Если определить функцию Лагранжа как

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t, \mathbf{y})=I(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)+\mathbf{y}[\mathbf{b}-\mathbf{g}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)], \tag{12.4.7}$$

то для решения задачи нужно выбрать $\{\mathbf{x}(t)\}$, максимизирующий функционал

$$J'=\int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t, \mathbf{y})\, dt, \tag{12.4.8}$$

и $\mathbf{y}$, минимизирующий J'. Отсюда следует, что решение можно найти, решая уравнение Эйлера

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right)=0 \tag{12.4.9}$$

совместно с граничными условиями и ограничениями-равенствами.

Третьим важным видом ограничений являются ограничения в форме неравенств, связывающие фазовые координаты, скорости их изменения и время. Задача в этом случае имеет вид

$$\max_{\{x(t)\}} J=\int_{t_0}^{t_1} I(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)\, dt$$

$$\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0 \tag{12.4.10}$$

$$\mathbf{x}(t_1)=\mathbf{x}_1$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)\leqslant\mathbf{b},$$

где $\mathbf{g}(\cdots)$, как и прежде, представляет собой вектор-столбец, составленный из r функций. Построим функцию Лагранжа так же, как в (12.4.7). Тогда решение должно удовлетворять соотношениям

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right)=0$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)\leqslant\mathbf{b} \tag{12.4.11}$$

$$\mathbf{y}\geqslant 0$$

$$\mathbf{y}[\mathbf{b}-\mathbf{g}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)=0,$$

где первые n соотношений — это уравнения Эйлера, а остальные представляют собой условия Куна — Таккера, подобные тем, которые рассматривались в гл. 4. Из условий Куна — Такера вытекают условия дополняющей нежесткости, состоящие в том, что любой множитель Лагранжа равен нулю, если соответствующее ограничение выполняется как строгое неравенство и что любое ограничение выполняется как равенство, если соответствующий множитель Лагранжа положителен.

Таким образом, с помощью вариационного исчисления можно решать ряд задач управления с определенными типами ограничений. Однако принципиальный недостаток классического вариационного исчисления состоит в том, что оно неприменимо для непосредственного решения задач, в которых значения управляющих параметров принадлежат фиксированной области. Этот недостаток преодолен в более новых подходах — в динамическом программировании и в принципе максимума.

ЗАДАЧИ

12-А. Найдите экстремали в задаче с одной фазовой координатой $x(t)$ и проверьте выполнение условий Лежандра в следующих примерах:

1. $I = 4xt - \dot{x}^2$
2. $I = t\dot{x} - 2\dot{x}^2$
3. $I = \frac{1}{x}\sqrt{1-\dot{x}^2}$
4. $I = x^2 - 6xt$
5. $I = \frac{-\dot{x}^2}{t^3}$.

12-Б. Найдите экстремали в задаче с двумя фазовыми координатами $(x_1(t), x_2(t))'$ и проверьте выполнение условий Лежандра в следующих примерах:

1. $I = \dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2$
2. $I = \dot{x}_1^2 + x_2 + \dot{x}_1\dot{x}_2$.

12-В. Найдите решение задачи

$$\min \int_0^{t_1} \frac{(1-\dot{x}^2)^{1/2}}{x}\,dt$$

$$x(0) = 0$$

$$x(t_1) = t_1 - 5.$$

12-Г. Рассмотрите следующую задачу:

$$\min \int_1^3 x^2 (1-\dot{x})^2\,dt$$

$$x(1) = 0 \quad x(3) = a.$$

1. Показать, что если $a = 0$ или $a = 2$, то решением является прямая.
2. Показать, что если $0 < a < 2$, то решение содержит точку излома. Изобразите графически несколько возможных решений, если $a = 1$. Убедитесь, что эти решения удовлетворяют уравнению Эйлера и условиям Вейерштрасса — Эрдмана в точке излома.
3. Что будет при $a > 2$?

12-Д. Найдите и изобразите графически несколько возможных решений следующей задачи:

$$\min \int_1^4 (1-\dot{x})^2 (1+\dot{x})^2\,dt$$

$$x(1) = 0$$

$$x(4) = 1.$$

12-Е. Покажите, что решение задачи о проведении кратчайшей кривой, соединяющей две точки, т. е. отрезок прямой, удовлетворяет условиям Лежандра и Вейерштрасса.

12-Ж. Покажите, что если подынтегральная функция $I(\cdots)$ является квадратической, то оптимальное управление (с обратной связью) представляет собой линейную функцию фазовых координат.

12-З. Провод длины l подвешен на двух опорах, расположенных на одном уровне. Форма висящего провода определяется кривой $x(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$, где

$$x(t_0) = x_0$$

$$x(t_1) = x_1.$$

Потенциальная энергия висящего провода

$$V = \int mgx\,ds = mg\int_{t_0}^{t_1} x\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt$$

равна минимуму, если он находится в равновесии. Предполагается, что длина провода фиксирована

$$l = \int ds = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt.$$

Покажите, что провод провисает по цепной линии

$$x = c_1 \cosh\left(\frac{t+c_2}{c_1}\right) + c_3,$$

где c_1, c_2 и c_3 — постоянные, зависящие от параметров задачи.

12-И. Рассмотрите задачу, которая содержит управляющий параметр в явной форме

$$\max_{\{u(t)\}} J = \int_{t_0}^{t_1} I(x, u, t)\, dt$$

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$x(t_1) = x_1.$$

Используя интегрирование по частям, докажите, что уравнение Эйлера для этой задачи имеет вид.

$$\frac{\partial I}{\partial x} - \frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial u}\frac{\partial I}{\partial u} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I/\partial u}{\partial f/\partial u}\right) = 0.$$

См. [5,6].

12-К. В задаче с целевым функционалом

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}})\, dt$$

подынтегральная функция зависит от вектора вторых производных $\ddot{\mathbf{x}}$. Покажите, что уравнение Эйлера в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial I}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial I}{\partial \ddot{\mathbf{x}}}\right) = 0.$$

Рассмотрите общий случай, когда I зависит от всех производных по времени от $\mathbf{x}(t)$ до l-го порядка включительно.

12-Л. Докажите, что для функционалов вида

$$J = \int_{t_0}^{t_1} A(x, t)\sqrt{1 + \dot{x}^2}\, dt$$

условие трансверсальности сводится к условию ортогональности. Покажите, в частности, что кратчайший отрезок прямой, соединяющий точку и заданную кривую, является перпендикуляром к касательной к кривой в точке пересечения этого отрезка и прямой.

12-М. Покажите, что уравнение Эйлера выполняется автоматически (и, следовательно, не может быть использовано для отыскания решения) тогда, и только тогда, когда подынтегральная функция линейно зависит от $\dot{x}$, т. е.

$$I(x, \dot{x}, t) = A(x, t) + B(x, t)\dot{x},$$

где

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial t}.$$

Что делает эту задачу аналогичной задаче максимизации функции, равной постоянной величине?

12-Н. Покажите, что уравнение Эйлера для

$$\int_{t_0}^{t_1} I(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)\, dt$$

совпадает с уравнением Эйлера для

$$\int_{t_0}^{t_1} \{cI(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) + I'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)\}\, dt.$$

Здесь c — постоянное число, не равное нулю, а

$$I'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}},$$

где $\varphi(\mathbf{x}, t)$ — любая непрерывно дифференцируемая функция.

12-О. Проверьте необходимость условия Вейерштрасса, показав, что в задаче

$$\min J = \int_0^1 \dot{x}^3\, dt$$

$$x(0) = 0$$

$$x(1) = 1$$

прямая $x = t$ удовлетворяет и уравнению Эйлера и условию Лежандра, однако она не удовлетворяет условию Вейерштрасса и не является решением задачи [3].

12-П. Убедитесь в том, что уравнение Эйлера всегда можно представить в виде (12.1.15).

12-Р. Вывести условие Лежандра для задачи с одной фазовой координатой из условия (12.2.2), где $J(\varepsilon)$ — значение целевого функционала для проварьированной траектории решения

$$z(t) = x(t) + \varepsilon\eta(t),$$

где $\eta(t) = 0$, но $\dot{\eta}(t) \neq 0$,
например $\eta(t) = (\sin wt)/w$, где w — большое число.

12-С. Один из способов учета ограничений-неравенств, наложенных на управляющие параметры, состоит в преобразовании переменных. Так, вместо ограничения $\dot{x} \leqslant K$ можно ввести переменную z, положив $z^2 = K - \dot{x}$, а вместо ограничения $|\dot{x}| \leqslant 1$ можно использовать переменную θ, положив $\dot{x} = \sin\theta$. Укажите необходимые условия для существования решения классической задачи вариационного исчисления в каждом из этих случаев [7, 8].