ЧАСТЬ IV
Динамическая оптимизация

Глава 11

Задача управления

Статической задачей рационального ведения хозяйства (рациональной экономической деятельности) мы называли ранее задачу распределения ограниченных ресурсов для достижения комплекса конкурирующих целей в некоторый определенный момент времени. Говоря языком математики, задача состоит в выборе из заданного допустимого множества значений ряда переменных, называемых средствами («инструментами») таких значений, при которых достигается максимум заданной целевой функции. Представленная в такой форме задача была названа нами *задачей математического программирования.*

Динамическая задача рационального ведения хозяйства — это задача распределения ограниченных ресурсов для достижения комплекса конкурирующих целей на протяжении некоторого промежутка времени от начального момента до конечного. Сформулируем эту задачу в математических терминах. Рассмотрим некоторые переменные величины, называемые *управляющими параметрами.* Задано некоторое множество функций времени, называемое *множеством управления* (control set). Задача состоит в выборе управляющих параметров как функций времени, принадлежащих множеству управлений. Выбранные функции времени в свою очередь определяют, какой вид имеют функции времени некоторых других переменных, с помощью которых описывается поведение системы. Эти переменные называются *фазовыми координатами.* Значения фазовых координат в каждый момент времени выбираются таким образом, чтобы максимизировать заданный *целевой функционал,* зависящий от фазовых координат и управляющих параметров (и те и другие рассматриваются как функции времени). Функции времени для управляющих параметров и для фазовых координат связаны с помощью системы дифференциальных уравнений, называемых *уравнениями движения*. Задача, представленная в указанной форме, называется *задачей управления*.

Классическим примером задачи управления является определение оптимальной траектории движения ракеты. Управляющие параметры в такой задаче — это моменты включения двигателей и длительность их работы, величина и направление силы тяги, которую следует приложить к ракете в каждый отдельный момент времени. Режим работы двигателей выбирается в зависимости от ряда ограничений, например в зависимости от общего количества ракетного топлива, имеющегося на борту. Фазовыми переменными, описывающими траекторию ракеты, являются ее масса, а также положение и скорость относительно фиксированной системы координат. Зависимость фазовых координат от силы тяги выражается с помощью системы дифференциальных уравнений, получаемых на основе законов физики. В результате расчет траектории предстоящего космического полета заключается в отыскании максимума некоторого целевого функционала. Так, например, при разработке проекта полета на Луну на ракете «Аполлон» целью является максимизация полезной нагрузки последней ступени. При этом считаются известными место посадки на Луну и конечная скорость — достаточно малая, чтобы экипаж ракеты и ее оборудование не пострадали при посадке на лунную поверхность.

11.1. СТРОГАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

При строгой формулировке задачи управления используются следующие понятия: *время* (*момент времени*), *фазовые координаты*, *управляющие параметры*, *уравнения движения*, *определение конечного момента*, *целевой функционал* [1].

Время t измеряется как непрерывная величина. Предполагается, что t изменяется в некотором фиксированном промежутке: от начального момента t_0, который обычно

[1] Основная литература по задаче управления [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Важные с исторической точки зрения статьи, относящиеся к задачам управления, содержатся в сборниках под редакцией Беллмана и Калаба [7] и Ольденбургера [8].

известен, до конечного момента t_1, который часто требуется определить. Следовательно, время задано на промежутке [1]

$$t_0 \leqslant t \leqslant t_1. \qquad (11.1.1)$$

Состояние системы в любой момент времени t из указанного промежутка характеризуется с помощью n вещественных чисел $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, называемых *фазовыми координатами*. Составленный из фазовых координат n-мерный вектор-столбец

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))', \qquad (11.1.2)$$

называемый *фазовым вектором* (*фазовой точкой*), можно геометрически интерпретировать как точку в n-мерном евклидовом пространстве E^n. Каждая *фазовая координата* считается непрерывной функцией времени, поэтому *фазовая траектория*

$$\{\mathbf{x}(t)\} = \{\mathbf{x}(t) \in E^n \mid t_0 \leqslant t \leqslant t_1\} \qquad (11.1.3)$$

представляет собой непрерывную вектор-функцию времени, значениями которой в каждый данный момент времени t из указанного промежутка являются фазовые векторы (11.1.2). С геометрической точки зрения фазовая траектория представляет собой некоторую кривую, состоящую из точек пространства E^n. Началом этой кривой является фиксированное *начальное состояние*

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \qquad (11.1.4)$$

а окончанием — *конечное состояние*

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1, \qquad (11.1.5)$$

которое во многих задачах требуется определить.

Выборы (решения), которые нужно осуществлять в каждый данный момент времени t из указанного интервала, характеризуются с помощью r вещественных чисел $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t)$, называемых управляющими параметрами. Составленный из управляющих параметров r-мерный вектор-столбец

$$\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t))', \qquad (11.1.6)$$

[1] Задачи управления, в которых время измеряется как дискретная величина ($t = 0, 1, 2, \ldots$) рассматриваются в работах Чанга [9], Ариса [10], Фана и Ванга [11], Уайлда и Бейтлера [12]. См. также разделы 11.4 и 13.3.

называемый *управляющим вектором*, можно интерпретировать геометрически как точку в E^r. *Управлением* («траекторией управления») называется функция

$$\{\mathbf{u}(t)\} = \{\mathbf{u}(t) \in E^r \mid t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}. \qquad (11.1.7)$$

Требуется, чтобы каждый управляющий параметр являлся кусочно-непрерывной функцией времени. Поэтому управление представляет собой кусочно-непрерывную функцию времени. Значениями этой функции в каждый данный момент времени t из указанного промежутка являются управляющие векторы (11.1.6). С геометрической точки зрения управление представляет собой некоторую кривую, состоящую из точек пространства, причем эта кривая непрерывна всюду, за исключением, возможно, некоторого конечного числа точек разрывов первого рода.

Предполагается, что возможные значения управляющих параметров удовлетворяют некоторым ограничениям. Эти ограничения в общей форме состоят в том, что управляющий вектор в каждый момент времени из интервала $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ должен принадлежать некоторому фиксированному непустому подмножеству Ω r-мерного евклидова пространства

$$\mathbf{u}(t) \in \Omega, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1. \qquad (11.1.8)$$

Обычно предполагается, что множество Ω [1] является выпуклым и компактным (т. е. замкнутым и ограниченным) и что оно инвариантно относительно времени. Управление (11.1.7) называется *допустимым*, если оно представляет собой кусочно-непрерывную вектор-функцию времени, значения которой в любой момент времени из указанного интервала принадлежат Ω. Множество управлений U — это множество всех допустимых управлений, т. е. таких управлений, которые являются кусочно-непрерывными функциями времени, заданными в промежутке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, значения которых в любой момент из указанного промежутка принадлежат Ω. Управление должно принадлежать указанному множеству управлений, т. е.

$$\{\mathbf{u}(t)\} \in U. \qquad (11.1.9)$$

Фазовая траектория $\{\mathbf{x}(t)\}$ определяется из *уравнений движения*, т. е. из системы дифференциальных уравнений, в которых скорость изменения каждой фазовой координаты представлена в виде функции фазовых координат, управляющих параметров и времени

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \qquad (11.1.10)$$

или в развернутом виде

$$\frac{dx_j}{dt}(t) = \dot{x}_j(t) = f_j(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t);$$
$$u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t); t), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (11.1.11)$$

Предполагается, что каждая из заданных n функций $f_1(\cdots), f_2(\cdots), \ldots, f_n(\cdots)$ является непрерывно дифференцируемой. Если эти дифференциальные уравнения не зависят явно от времени, то уравнения движения называются *автономными*. Важным примером такой системы уравнений являются линейные автономные уравнения движения

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \qquad (11.1.12)$$

где $\mathbf{A}$ — фиксированная матрица размерности $n \times n$, а $\mathbf{B}$ — фиксированная матрица размерности $n \times r$.

Фиксированные начальные значения фазовых координат (11.1.4) являются граничными условиями для уравнений движения. Если заданы эти начальные значения и управление $\{\mathbf{u}(t)\}$, то существует единственная фазовая траектория $\{\mathbf{x}(t)\}$, удовлетворяющая уравнениям движения и граничным условиям. Эту траекторию можно найти интегрированием дифференциальных уравнений при данных начальных условиях $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Фазовая траектория, найденная в результате решения уравнений движения при данном начальном состоянии с использованием допустимого управления, называется *допустимой*, а любая фазовая точка на фазовой траектории, которую можно достичь за конечное время, называется *достижимой*.

Конечный момент времени t_1 определяется условием

$$(\mathbf{x}(t), t) \in T \quad \text{при} \quad t = t_1, \qquad (11.1.13)$$

где T — заданное подмножество в E^{n+1}, называемое *конечной поверхностью*. Важными частными случаями задачи управления являются *задача с фиксированным временем*, когда конечный момент времени t_1 задан в явной форме как параметр задачи, и *задача с фиксированным*

[1] Множество Ω называют областью управления.— *Прим. перев.*

конечным моментом времени, когда $\mathbf{x}(t_1)$ задан в явной форме как вектор параметров задачи.

Целевой функционал, максимум которого требуется найти, представляет собой отображение управлений (функций времени) на точки вещественной прямой. Этот функционал будет рассматриваться, как правило, в следующей форме [1]:

$$J = J\{\mathbf{u}(t)\} = \int_{t_0}^{t_1} I(\mathbf{x}(t),\ \mathbf{u}(t),\ t)\, dt + F(\mathbf{x}_1,\ t_1). \qquad (11.1.14)$$

Подынтегральная функция $I(\cdots)$ показывает, что функционал зависит от фазовых координат и управляющих параметров, являющихся функциями времени, и от времени, т. е.

$$I(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ t) = I(x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t);\ u_1(t),\ u_2(t),\ \ldots,\ u_r(t);\ t), \qquad (11.1.15)$$

$$\text{где} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

Второе слагаемое $F(\cdot\cdot)$ в выражении для функционала, которое мы назовем *функцией конечных параметров*, показывает, что функционал зависит от конечного состояния и от конечного момента времени:

$$F(\mathbf{x}_1,\ t_1) = F(x_1(t_1),\ x_2(t_1),\ \ldots,\ x_n(t_1);\ t_1). \qquad (11.1.16)$$

Предполагается, что как $I(\cdots)$, так и $F(\cdot\cdot)$ являются фиксированными непрерывно дифференцируемыми функциями. Целевой функционал записан в (11.1.14) как функционал, зависящий от управлений, потому что если вектор-функция $\mathbf{f}(\cdots)$ и вектор $\mathbf{x}_0$ заданы, то управление $\{\mathbf{u}(t)\}$ определяет фазовую траекторию $\{\mathbf{x}(t)\}$.

Задачу с целевым функционалом такого вида, как в (11.1.14), обычно называют *задачей Больца*. Если функция конечных параметров тождественно равна нулю, так что

$$J = \int_{t_0}^{t_1} I(\mathbf{x},\mathbf{u},t)\, dt, \qquad (11.1.17)$$

[1] Отметим, что стандартные обозначения в задаче управления отличаются от обозначений в задачах математического программирования. Динамическим аналогом вектора инструментальных переменных x из теории математического программирования является управление $\{\mathbf{u}(t)\}$, а не фазовая траектория $\{\mathbf{x}(t)\}$.

то такую задачу называют *задачей Лагранжа*. Задачу, в которой подынтегральная функция тождественно равна нулю, так что

$$J = F(\mathbf{x}_1,\ t_1), \qquad (11.1.18)$$

называют обычно *задачей Майера*. Может показаться, что задача Больца является более общей, нежели задача Лагранжа или задача Майера, однако на самом деле все три задачи эквивалентны, что можно доказать с помощью соответствующих преобразований переменных. Так, например, всякую задачу Больца можно свести к задаче Майера, определив следующим образом дополнительную фазовую координату x_{n+1}:

$$\dot{x}_{n+1}(t) = I(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ t)$$
$$x_{n+1}(t_0) = 0. \qquad (11.1.19)$$

Тогда выражение (11.1.14) принимает вид

$$J = x_{n+1}(t_1) + F(\mathbf{x}_1,\ t_1), \qquad (11.1.20)$$

а функционал такого типа является целевым функционалом задачи Майера.

Итак, общая задача управления состоит в следующем: требуется найти

$$\max_{\{\mathbf{u}(t)\}} J = \int_{t_0}^{t_1} I(\mathbf{x},\mathbf{u},t)\, dt + F(\mathbf{x}_1,t_1) \qquad (11.1.21)$$

при условии, что $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ t)$

$$t_0 \ \text{и} \ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \ \text{фиксированы}$$
$$(\mathbf{x}(t),\ t) \in T \quad \text{при} \quad t = t_1$$
$$\{\mathbf{u}(t)\} \in U.$$

Геометрическая интерпретация этой задачи для случая одной фазовой координаты дана на рис. 11.1. Из множества допустимых фазовых траекторий, начало которых соответствует заданному начальному состоянию x_0 в начальный момент времени t_0, требуется выбрать определенную фазовую траекторию, при этом необходимо учитывать, что каждая допустимая фазовая траектория осуществляется при использовании некоторого допустимого управления $\{\mathbf{u}(t)\}$. Оптимальной траекторией $\{x^*(t)\}$ является такая

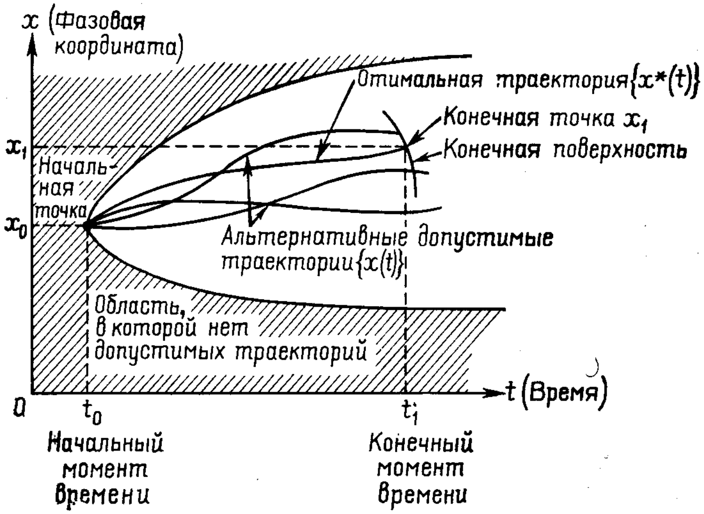

Рис. 11.1. Геометрическое изображение задачи управления в случае одной фазовой координаты.

допустимая фазовая траектория, заканчивающаяся на конечной поверхности, на которой достигается максимум целевого функционала.

11.2. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Задача с целевым функционалом вида (11.1.14), или с эквивалентными ему целевыми функционалами вида (11.1.17), или (11.1.18) является особенно важной, так как она представляет собой обобщение ряда частных задач управления. Одним из таких важных частных случаев является *задача об оптимальном быстродействии* (задача о минимальном времени перехода), в которой требуется за минимальное время перевести фазовую точку из заданного начального положения в заданное конечное положение. В этом случае целевой функционал принимает вид

$$J = -(t_1 - t_0). \tag{11.2.1}$$

Тот же вид имеет функционал в задаче Лагранжа, в которой $I(\cdot\cdot\cdot) = -1$. Так как время t_0 задано, то в эквивалентной задаче Майера функция $F(\cdot\cdot) = -t_1$. Классическим примером задачи о минимальном времени перехода, относящимся еще к XVII столетию, является *задача о брахистохроне.* В этой задаче рассматривается движение материальной точки, которая под действием силы тяжести скатывается без трения вдоль некоторой кривой из фиксированной верхней точки в фиксированную нижнюю точку. Требуется определить кривую, соответствующую минимальному времени перехода. Другим примером может служить задача управления кораблем, когда требуется достичь места назначения за минимальное время.

Второй частный случай задач управления связан с работой автоматических следящих устройств (сервомеханизмов). В задачах такого рода известны желательные состояния объекта $\mathbf{x}^0(t)$ в каждый момент определенного промежутка времени и требуется обеспечить, чтобы фактические значения фазового вектора в каждый момент времени были достаточно близкими к желательным состояниям. Например, при отапливании дома фазовой координатой является температура в помещении, которую желательно поддерживать на уровне, достаточно близком к заданному. Целевой функционал в этом случае имеет вид

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(\mathbf{x}^0(t) - \mathbf{x}(t))\,dt, \tag{11.2.2}$$

где $\varphi(\cdot)$ — функция, измеряющая отрицательный эффект от различия между фактическим и желательным состоянием. Например, если применяется критерий метода наименьших квадратов, то функция $\varphi(\cdot)$ представляет собой квадратичную форму

$$\varphi(\mathbf{x}^0(t) - \mathbf{x}(t)) = (\mathbf{x}^0(t) - \mathbf{x}(t))'\,\mathbf{D}\,(\mathbf{x}^0(t) - \mathbf{x}(t)), \tag{11.2.3}$$

где $\mathbf{D}$ — заданная отрицательно определенная матрица взвешивающих коэффициентов. Произведя перемножение и отбросив постоянный член, поскольку его значение несущественно при поиске максимума, получим интегральный функционал с функцией, равной сумме линейной формы и квадратичной формы:

$$J=\int_{t_0}^{t_1}(\mathbf{cx}+\mathbf{x}'\mathbf{Dx})\,dt, \tag{11.2.4}$$

где $\mathbf{c} = -2\mathbf{x}^0(t)'\,\mathbf{D}$ — вектор-строка.

Третий важный частный случай — задача на минимум энергии, в которой целевой функционал зависит только от управлений. Если подынтегральная функция в этой задаче представляет собой квадратичную форму, то

$$J=\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{u}(t)'\,\mathbf{Eu}(t)\,dt, \tag{11.2.5}$$

где $\mathbf{E}$ — фиксированная отрицательно определенная матрица взвешивающих коэффициентов. Если объединить эту задачу с предыдущей, то можно образовать целевой функционал

$$J=\int_{t_0}^{t_1}(\mathbf{cx}+\mathbf{x}'\mathbf{Dx}+\mathbf{u}'\mathbf{Eu})\,dt, \tag{11.2.6}$$

где $\mathbf{c}$ — фиксированный вектор-строка, а $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ — фиксированные отрицательно определенные матрицы. Не теряя общности, можно считать, что желательным состоянием является начало координат $\mathbf{x}^0(t)=0$, при этом $\mathbf{c}=0$. Измеряя различия между фактическими и желательными состояниями, приходим к функционалу

$$J=\int_{t_0}^{t_1}(\mathbf{x}'\mathbf{Dx}+\mathbf{u}'\mathbf{Eu})\,dt, \tag{11.2.7}$$

который является комбинацией функционалов (11.2.4) и (11.2.5).

11.3. ВИДЫ УПРАВЛЕНИЯ

В задачах управления встречаются два вида управления. Один из них — *управление по разомкнутому контуру*. В этом случае оптимальное управление, являющееся решением (11.1.21), определяется как функция времени

$$\{\mathbf{u}^*(t)\}. \tag{11.3.1}$$

Управление по разомкнутому контуру полностью определяется в начальный момент t_0, а фазовая траектория $\{\mathbf{x}(t)\}$ отыскивается в результате интегрирования уравнений движения при фиксированных начальных условиях. Другой вид управления — *управление по замкнутому контуру* (с обратной связью). В этом случае оптимальное управление определяется как функция текущих фазовых координат и времени

$$\{\mathbf{u}^*(\mathbf{x}(t),\ t)\}. \tag{11.3.2}$$

В отличие от управления по разомкнутому контуру, когда все решения принимаются заранее, при управлении по замкнутому контуру решения можно пересматривать с учетом новой информации, которую несут текущие фазовые координаты. Задача определения оптимального управления по замкнутому контуру называется *задачей синтеза*.

Различия между управлением по разомкнутому контуру и управлением по замкнутому контуру хорошо видны на примере работы двух простых устройств: сушилки для белья и отопительной системы в здании. Большинство типов сушилок для белья представляет собой системы с управлением по разомкнутому контуру: режим работы их задается с помощью реле времени. Отопительная система, напротив, обычно регулируется с помощью термостата, который включает обогревающее устройство, если температура в помещении понизилась, и выключает его, если температура становится слишком высокой. Следовательно, управление обогревающим устройством зависит от текущего значения фазовой координаты — температуры в помещении.

Примеры этих двух видов управления существуют также и в экономике. Автоматические стабилизаторы, такие, как страхование по безработице и прогрессивный подоходный налог, представляют собой системы управления с обратной связью. Так, например, рост числа безработных приводит к росту суммы выплат пособий по безработице, что в свою очередь противодействует росту безработицы. Аналогично этому расширение инфляции приводит при действующей системе прогрессивного налогообложения к соответствующему увеличению подоходного налога, что противодействует росту инфляции. Управляющие параметры в каждом из этих случаев (пособия по безработице или налоговые отчисления) соответствуют текущему состоянию экономики. Другой пример системы управления с обратной связью — это денежная политика в том виде, как она осуществляется федеральной резервной системой США, которая регулирует выпуск денег и определяет условия кредита в соответствии с текущими значениями экономических переменных. Правда, имели место предложения превратить эту систему управления с обратной связью в разомкнутую систему управления, в которой определенный заранее темп роста суммы денег, участвующих в обороте, например в размере 5% в год, выдерживался бы неизменным вне зависимости от текущего состояния экономики.

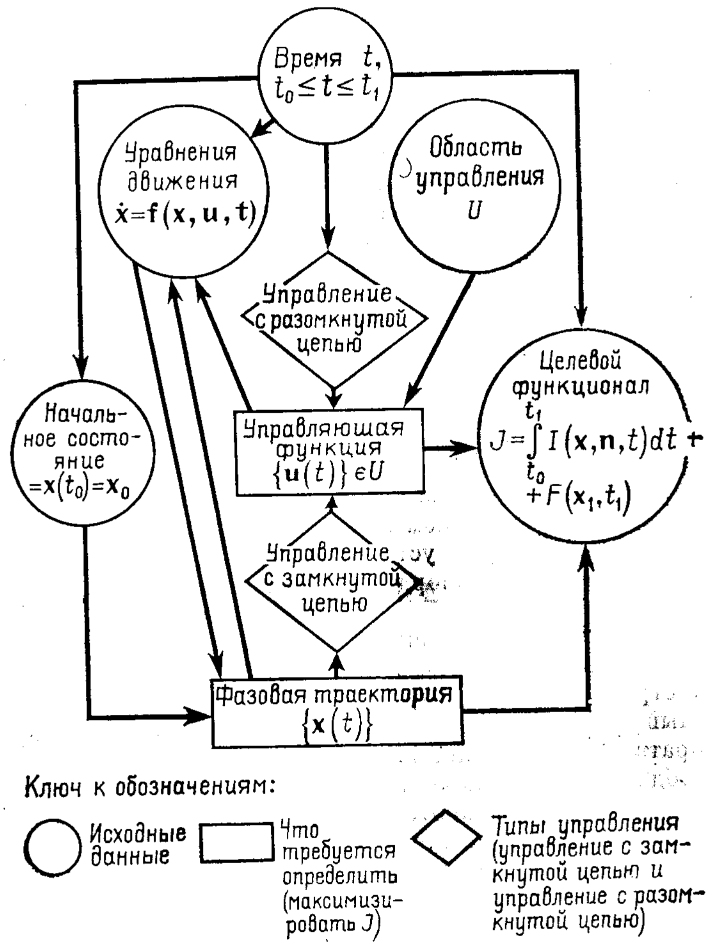

Рис. 11.2. Задача управления с фиксированным конечным моментом времени.

На рис. 11.2 в виде схемы показаны два вида управления и некоторые другие аспекты задач управления на примере задачи с закрепленным временем. Здесь кружками обозначены исходные данные: начальный момент и начальное состояние, уравнения движения, область (множество) управления и целевой функционал. В прямоугольниках указано, что требуется найти — управление и фазовую траекторию. Ромбами обозначены два вида управления: управление по замкнутому контуру и управление по разомкнутому контуру. Взаимосвязи, существующие между различными частями задачи, показаны с помощью стрелок. Так, например, поскольку для определения скорости изменения фазовых координат с помощью уравнений движения используется текущее состояние, определенное управление и время, то эти величины влияют на фазовую траекторию.

В дальнейшем, как правило, предполагается, что задача управления не содержит случайных переменных и что все необходимые параметры, функции и множества, указанные в (11.1.21), полностью определены. В этом случае управление по замкнутому контуру и управление с обратной связью приводят к одинаковым результатам. Поэтому основное внимание будет уделено управлению по разомкнутому контуру, которое обычно легче определить, чем управление по замкнутому контуру. Однако в двух типах задач управления, указанных ниже, управление по замкнутому контуру имеет преимущество перед управлением по разомкнутому контуру, так как первое доставляет большее максимальное значение целевого функционала. Этими двумя типами задач являются *задачи стохастического управления*, которые содержат случайные переменные с фиксированными распределениями, и *задачи адаптивного управления*, которые содержат неопределенности относительно начальных условий на параметры, функции или множества, которые уменьшаются или полностью устраняются по мере развертывания процесса. Задачи этих двух типов в настоящей книге не рассматриваются [1].

---

[1] Проблемы стохастического управления рассматриваются в работах Аоки [13] и Кушнера [14]. Об адаптивном управлении см. [15, 16, 17].

11.4. ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ КАК ЗАДАЧА ПРОГРАММИРОВАНИЯ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ; ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА

Задачу управления можно считать задачей математического программирования в бесконечномерном пространстве. Рассмотрим следующую задачу управления:

$$\max_{\{u(t)\}} J = \int_{t_0}^{t_1} I(x, u)\, dt$$

$$\dot{x} = f(x, u) \qquad (11.4.1)$$

$$t_0 \text{ и } x(t_0) = x_0 \text{ фиксированы}$$

$$t_1 \text{ фиксирован}$$

$$\{u(t)\} \in U.$$

Эта задача отличается от (11.1.21) следующими своими свойствами: она автономна, т. е. уравнения движения и целевой функционал не зависят явно от времени; данная задача относится к классу задач Лагранжа, так как целевой функционал не зависит от конечного состояния или от конечного момента времени; это задача с закрепленным временем, так как t_1 задано, а $x(t_1)$ произвольно; задача содержит только один управляющий параметр и одну фазовую координату.

Заданный промежуток времени $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$ можно разбить на N интервалов равной длины Δ

$$\Delta = \frac{t_1 - t_0}{N}. \qquad (11.4.2)$$

Время измеряется в дискретных единицах

$$t = t_0 + q\Delta, \qquad (11.4.3)$$

где индекс q изменяется от 0 (что соответствует $t = t_0$) до N (что соответствует $t = t_1$). Состояния и управления замеряются в отмеченные дискретные моменты времени

$$x^q = x(t_0 + q\Delta)$$

$$u^q = u(t_0 + q\Delta). \qquad (11.4.4)$$

Рассмотрим теперь задачу математического программирования с $N + 1$ переменной $u^0, u^1, \ldots, u^N$:

$$\max_{u^0, u^1, \ldots, u^N} J^N = \sum_{q=0}^{N} I(x^q, u^q)\,\Delta$$

$$x^{q+1} - x^q = f(x^q, u^q)\,\Delta, \quad q = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$x^0 = x_0, \quad u^q \in \Omega, \qquad (11.4.5)$$

где Δ — фиксированный положительный параметр. Пределом целевой функции этой задачи при N, стремящемся к бесконечности, и Δ, стремящемся к 0, и при фиксированной величине $N\Delta$, равной $(t_1 - t_0)$, является целевой функционал задачи (11.4.1), т. е.

$$\lim_{\substack{N \to \infty \\ \Delta \to 0 \\ N\Delta = (t_1 - t_0)}} J^N = J. \qquad (11.4.6)$$

При указанном переходе к пределу разностные уравнения в (11.4.5) превращаются в дифференциальные уравнения задачи (11.4.1). Таким образом, задачу управления можно считать задачей математического программирования в бесконечномерном пространстве. Этим пространством является множество всех кусочно-непрерывных вещественных функций $u(t)$, определенных на промежутке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Основная теорема математического программирования — теорема Вейерштрасса, рассматривавшаяся в параграфе 2.2, указывает условия, достаточные для существования максимума. Эти условия состоят в том, что целевая функция должна быть непрерывной, а допустимое множество — компактным. Обобщая эту теорему на случай бесконечномерного пространства, можно получить основную теорему существования для задач управления — обобщенную теорему Вейерштрасса. Согласно этой теореме, решение общей задачи управления (11.1.21) существует, если целевой функционал $J\{\mathbf{u}(t)\}$ является непрерывным функционалом от функций управления и если подмножество U бесконечномерного пространства, к которому принадлежат управления, является компактным[1]. Важным частным случаем, когда решения существуют, является задача, в которой функции $J(\cdots)$ и $\mathbf{f}(\cdots)$ линейно зависят от $\mathbf{u}$.

[1] Для доказательства обобщенной теоремы Вейерштрасса обозначим символом J^* точную верхнюю границу функционала $J\{\mathbf{u}(t)\}$ по всем $\{\mathbf{u}(t)\} \in U$, т. е. $J\{\mathbf{u}(t)\} \leqslant J^*$ при всех $\{\mathbf{u}(t)\} \in U$. Возьмем некоторую последовательность управлений $\{\mathbf{u}^p\}$, такую, что

$$J^* - \frac{1}{p} < J\{\mathbf{u}^p\} \leqslant J^*.$$

Так как множество U компактное, то эта последовательность содержит подпоследовательность $\{\mathbf{u}^{p_k}\}$, сходящуюся к некоторому управлению $\{\mathbf{U}^*\} \in U$. Тогда

$$J^* - \frac{1}{p_k} < J\{\mathbf{u}^{p_k}\} \leqslant J^*$$

и следовательно,

$$\lim_{p_k \to \infty} J\{\mathbf{u}^{p_k}\} = J^*.$$

Но так как функционал J непрерывен, т. е.

$$\lim_{p_k \to \infty} J\{\mathbf{u}^{p_k}\} = J\{\mathbf{u}^*\},$$

то оптимальным является управление $\{\mathbf{u}^*\} \in U$, для которого

$$J\{\mathbf{u}^*\} = J^*.$$