А. Ф. ФИЛИППОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для высших учебных заведений

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1970

517.2
Ф 53
УДК 517.9

Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Филиппов А. Ф., Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1970 г.

В сборник включены задачи по университетскому курсу дифференциальных уравнений и небольшое число более трудных задач. Даны указания о методах решения основных типов задач или указаны учебники, где излагаются эти методы.

Рисунков 7. Библиографических указаний 4.

Алексей Федорович Филиппов

Сборник задач по дифференциальным уравнениям

М., 1970 г., 96 стр. с илл.

Редакторы *А. П. Баева, И. Е. Морозова*

Техн. редактор *В. С. Никифорова* Корректор *Т. С. Вайсберг*

Сдано в набор 30/VII 1969 г. Подписано к печати 3/XI 1969 г. Бумага $84\times108/_{32}$. Физ. печ. л. 3. Условн. печ. л. 5,04. Уч.-изд. л. 5,1. Тираж 75 000 экз. Цена книги 18 коп. Заказ № 187.

Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР
Москва, М-54, Валовая, 28

2-2-3
13-70

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник содержит задачи по курсу обыкновенных дифференциальных уравнений в соответствии с программой, принятой на механико-математическом факультете Московского государственного университета. Часть задач взята из известных задачников Гюнтера и Кузьмина, Бермана, учебников Степанова, Филипса; большинство задач составлено заново. По сравнению с задачником Гюнтера и Кузьмина количество задач увеличено. Добавлено много задач небольшой и средней трудности, чтобы обеспечить достаточный выбор задач для упражнений. В сборник включены задачи на те отделы курса, которые не нашли отражения в задачнике Гюнтера и Кузьмина (например, на изоклины, особые точки, устойчивость по Ляпунову), и лишь небольшое число более трудных задач и задач теоретического характера (они отмечены звездочкой), так как в случае необходимости их можно взять из учебника И. Г. Петровского «Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений». Наконец, в сборник включено сравнительно небольшое число задач, затрагивающих некоторые вопросы курса более глубоко, чем этого требует программа (асимптотика решений линейных уравнений второго порядка, решение уравнений с помощью рядов, теория колебаний, приближенное решение дифференциальных уравнений).

В начале каждого параграфа изложены основные методы, необходимые для решения задач этого параграфа, или даны ссылки на соответствующие учебники. В ряде случаев приведены подробные решения типовых задач. Сборник рассчитан на пользование учебником В. В. Степанова «Курс дифференциальных уравнений». Можно пользоваться также учебниками И. Г. Петровского «Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений», Л. С. Понтрягина «Обыкновенные дифференциальные уравнения», Л. Э. Эльсгольца «Дифференциальные уравнения».

В книге приняты условные обозначения учебников:

[1] — В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений.

[2] — И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

[3] — Л. С. Понтрягин, Обыкновенные дифференциальные уравнения.

[4] — Л. Э. Эльсгольц, Дифференциальные уравнения.

Автор будет весьма благодарен всем лицам, которые сообщат ему свои замечания по содержанию этого задачника.

Автор

§ 1. ИЗОКЛИНЫ. СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СЕМЕЙСТВА КРИВЫХ. ИЗОГОНАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ

1. Решение уравнения $y'=f(x, y)$, проходящее через точку (x, y), должно иметь в этой точке производную y', равную $f(x, y)$, т. е. оно должно касаться прямой, наклоненной под углом $\alpha=\operatorname{arctg} f(x, y)$ к оси Ox. Геометрическое место точек плоскости (x, y), в которых наклон касательных к решениям уравнения $y'=f(x, y)$ один и тот же, называется изоклиной. Следовательно, уравнение изоклины имеет вид $f(x, y)=k$, где k — постоянная.

Чтобы приближенно построить решения уравнения $y'=f(x, y)$, можно начертить достаточное число изоклин, а затем провести решения, т. е. кривые, которые в точках пересечения с изоклинами $f(x, y)=k_1$, $f(x, y)=k_2$, ... имеют касательные с угловыми коэффициентами соответственно k_1, k_2, ... Пример применения этого метода см. [1], гл. I, § 1, п. 3.

2. Линии, пересекающие все кривые данного семейства под одним и тем же углом φ, называются изогональными траекториями. Углы β и α наклона траектории и кривой к оси Ox связаны соотношением $\beta=\alpha\pm\varphi$. Пусть

$$y'=f(x, y) \tag{1}$$

— дифференциальное уравнение данного семейства кривых, а

$$y'=f_1(x, y) \tag{2}$$

— уравнение семейства изогональных траекторий. Тогда $\operatorname{tg}\alpha=f(x, y)$, $\operatorname{tg}\beta=f_1(x, y)$. Следовательно, если уравнение (1) написано и угол φ известен, то легко найти $\operatorname{tg}\beta$ и затем написать дифференциальное уравнение траекторий (2).

Если уравнение данного семейства кривых написано в виде $F(x, y, y')=0$, то для построения уравнения изогональных траекторий можно воспользоваться аналогичными рассуждениями (см. [1], гл. III, § 5, п. 2).

3. Чтобы построить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют кривые семейства

$$\varphi(x, y, C_1, \ldots, C_n)=0, \tag{3}$$

надо продифференцировать равенство (3) n раз, считая y функцией от x, а затем из полученных уравнений и уравнения (3) исключить произвольные постоянные $C_1, \ldots, C_n$.

Пример. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых:

$$C_1x+(y-C_2)^2=0. \tag{4}$$

Так как уравнение семейства содержит два параметра, дифференцируем его два раза, считая $y=y(x)$:

$$C_1+2(y-C_2)\,y'=0, \tag{5}$$

$$2y'^2+2(y-C_2)\,y''=0. \tag{6}$$

Исключаем C_1. Из уравнения (5) имеем $C_1=-2(y-C_2)\,y'$; подставляя это в (4), получим

$$-2xy'(y-C_2)+(y-C_2)^2=0. \tag{7}$$

Исключаем C_2. Из уравнения (6) имеем $y-C_2=-\frac{y'^2}{y''}$; подставляя это в (7), получим после упрощений дифференциальное уравнение $y'+2xy''=0$.

В задачах 1—14 с помощью изоклин начертить (приближенно) решения данных уравнений.

1. $y'=y-x^2$.
2. $2(y+y')=x+3$.
3. $y'=\frac{x^2+y^2}{2}-1$.
4. $(x^2+1)\,y'=y-2x$.
5. $yy'+x=0$.
6. $xy'=2y$.
7. $xy'+y=0$.
8. $y'+1=2(y-x)(y'-1)$.
9. $y'(y^2+1)+x=0$.
10. $y'=-\frac{x}{y}$.
11. $y'=\frac{y-3x}{x+3y}$.
12. $y'=\frac{y}{x+y}$.
13. $x^2+y^2y'=1$.
14. $(x^2+y^2)\,y'=4x$.

15*. Написать уравнение геометрического места точек (x, y), являющихся точками максимума или минимума решений уравнения $y'=f(x, y)$. Как отличить точки максимума от точек минимума?

16*. Написать уравнение геометрического места точек перегиба графиков решений уравнения $y'=f(x, y)$.

В задачах 17—29 составить дифференциальные уравнения данных семейств линий.

17. $y=e^{Cx}$.
18. $y=(x-C)^3$.
19. $y=Cx^3$.
20. $y=\sin(x+C)$.
21. $x^2+Cy^2=2y$.
22. $y^2+Cx=x^3$.
23. $y=C(x-C)^2$.
24. $Cy=\sin Cx$.
25. $y=ax^2+be^x$.
26. $(x-a)^2+by^2=1$.
27. $y=a\sin x+bx$.
28. $y=ax^3+bx^2+cx$.
29. $x=ay^2+by+c$.

30. Составить дифференциальное уравнение окружностей радиуса 1, центры которых лежат на прямой $y=2x$.

31. Составить дифференциальное уравнение парабол с осью, параллельной Oy, и касающихся одновременно прямых $y=0$ и $y=x$.

32. Составить дифференциальное уравнение окружностей, касающихся одновременно прямых $y=0$ и $y=x$ и расположенных в области $0\leqslant y\leqslant x$.

33. Составить дифференциальное уравнение всех парабол с осью, параллельной Oy, и проходящих через начало координат.

34. Составить дифференциальное уравнение всех окружностей, касающихся оси абсцисс.

В задачах 35 — 36 найти системы дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют линии данных семейств.

35. $ax+z=b$, $y^2+z^2=b^2$.
36. $x^2+y^2=z^2-2bz$; $y=ax+b$.

В задачах 37—50 составить дифференциальные уравнения[1]) траекторий, пересекающих линии данного семейства под данным углом φ:

37. $y=Cx^2$, $\varphi=90°$.
38. $y^2=x+C$, $\varphi=90°$.
39. $x^2=y+Cx$, $\varphi=90°$.
40. $x^2+y^2=a^2$, $\varphi=45°$.
41. $y=kx$, $\varphi=60°$.
42. $3x^2+y^2=C$, $\varphi=30°$.
43. $y^2=2px$, $\varphi=60°$.
44. $r=a+\cos\theta$, $\varphi=90°$.
45. $r=a\cos^2\theta$, $\varphi=90°$.
46. $r=a\sin\theta$, $\varphi=45°$.
47. $y=x\ln x+Cx$, $\varphi=\operatorname{arctg}2$.
48. $x^2+y^2=2ax$, $\varphi=45°$.
49. $x^2+C^2=2Cy$, $\varphi=90°$.
50. $y=Cx+C^3$, $\varphi=90°$.

§ 2. УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

1. Уравнения с разделяющимися переменными могут быть записаны в виде

$$y'=f(x)\,g(y), \tag{1}$$

а также в виде

$$M(x)\,N(y)\,dx+P(x)\,Q(y)\,dy=0. \tag{2}$$

Для решения такого уравнения надо обе его части умножить или разделить на такое выражение, чтобы в одну часть уравнения

---

[1]) Уравнения, получаемые в задачах 37—50, могут быть решены методами, излагаемыми в дальнейших параграфах.

входило только x, в другую — только y, и затем проинтегрировать обе части.

При делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестные x и y, могут быть потеряны решения, обращающие это выражение в нуль.

Пример. Решить уравнение

$$x^2y^2y' + 1 = y. \qquad (3)$$

Приводим уравнение к виду (2)

$$x^2y^2\frac{dy}{dx} = y - 1; \quad x^2y^2\,dy = (y-1)\,dx.$$

Делим обе части уравнения на $x^2(y-1)$:

$$\frac{y^2}{y-1}\,dy = \frac{dx}{x^2}.$$

Переменные разделены. Интегрируем обе части уравнения

$$\int \frac{y^2}{y-1}\,dy = \int \frac{dx}{x^2}; \quad \frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C.$$

При делении на $x^2(y-1)$ могли быть потеряны решения $x=0$ и $y-1=0$, т. е. $y=1$. Очевидно, $y=1$ — решение уравнения (3), а $x=0$ — нет.

2. Уравнения вида $y' = f(ax+by)$ приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными заменой $z = ax+by$ (или $z = ax+by+c$, где c любое).

В задачах **51 — 65** решить данные уравнения и для каждого из них построить несколько интегральных кривых. Найти также решения, удовлетворяющие начальным условиям (в тех задачах, где указаны начальные условия).

51. $xy\,dx + (x+1)\,dy = 0$. **52.** $\sqrt{y^2+1}\,dx = xy\,dy$.

53. $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0$; $y(0) = 1$.

54. $y'\operatorname{ctg} x + y = 2$; $y(0) = -1$.

55. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$; $y(2) = 0$. **56.** $xy' + y = y^2$; $y(1) = 0{,}5$.

57. $2x^2yy' + y^2 = 2$. **58.** $y' - xy^2 = 2xy$.

59. $e^{-s}\left(1 + \frac{ds}{dt}\right) = 1$. **60.** $z' = 10^{x+z}$.

61. $x\frac{dx}{dt} + t = 1$. **62.** $y' = \cos(y-x)$.

63. $y' - y = 2x - 3$. **64.** $(x+2y)y' = 1$; $y(0) = -1$.

65. $y' = \sqrt{4x+2y-1}$.

В задачах **66—67** найти решения уравнений, удовлетворяющие указанным условиям при $x \to +\infty$.

66. $x^2y' - \cos 2y = 1$; $y(+\infty) = 9\pi/4$.

67. $3y^2y' + 16x = 2xy^3$; $y(x)$ ограничено при $x \to +\infty$.

68. Найти ортогональные траектории к линиям следующих семейств:

а) $y = Cx^2$; б) $y = Ce^x$; в) $Cx^2 + y^2 = 1$.

В задачах **69*** и **70*** переменные разделяются, но получаемые интегралы не могут быть выражены через элементарные функции. Однако, исследовав их сходимость, можно дать ответ на поставленные вопросы.

69*. Показать, что каждая интегральная кривая уравнения

$$y' = \sqrt[3]{\frac{y^2+1}{x^4+1}}$$

имеет две горизонтальные асимптоты.

70*. Исследовать поведение интегральных кривых уравнения

$$y' = \sqrt{\frac{\ln(1+y)}{\sin x}}$$

в окрестности начала координат. Показать, что из каждой точки границы первого координатного угла выходит одна интегральная кривая, проходящая внутри этого угла.

§ 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ [1])

1. Чтобы решить приведенные ниже геометрические задачи, надо построить чертеж, обозначить искомую кривую через $y = y(x)$ (если задача решается в прямоугольных координатах) и выразить все упоминаемые в задаче величины через x, y и y'. Тогда данное в условии задачи соотношение превращается в дифференциальное уравнение, из которого можно найти искомую функцию $y(x)$.

2. В физических задачах надо прежде всего решить, какую из величин взять за независимое переменное, а какую — за искомую функцию. Затем надо выразить, на сколько изменится искомая функция y, когда независимое переменное x получит приращение Δx, т. е. выразить разность $y(x+\Delta x) - y(x)$ через величины, о которых говорится в задаче. Разделив эту разность на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим дифференциальное уравнение, из которого можно найти искомую функцию. В большинстве задач

[1]) Все задачи этого параграфа сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными. Задачи, приводящиеся к уравнениям других типов, можно найти в соответствующих параграфах, а также в § 17.

содержатся условия, с помощью которых можно определить значения постоянных, входящих в общее решение дифференциального уравнения. Иногда дифференциальное уравнение можно составить более простым путем, воспользовавшись физическим смыслом производной (если независимое переменное — время t, то $\frac{dy}{dt}$ есть скорость изменения величины y).

В некоторых задачах при составлении уравнения следует использовать физические законы, сформулированные в тексте перед задачей (или перед группой задач).

Пример. В сосуд, содержащий 10 *л* воды, непрерывно поступает со скоростью 2 *л* в минуту раствор, в каждом литре которого содержится 0,3 *кг* соли. Поступающий в сосуд раствор перемешивается с водой, и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через 5 минут?

Решение. Примем за независимое переменное время t, а за искомую функцию $y(t)$ — количество соли в сосуде через t минут после начала опыта. Найдем, на сколько изменится количество соли за промежуток времени от момента t до момента $t+\Delta t$. В одну минуту поступает 2 *л* раствора, а в Δt минут — $2\Delta t$ литров; в этих $2\Delta t$ литрах содержится $0{,}3\cdot 2\,\Delta t = 0{,}6\,\Delta t$ *кг* соли. С другой стороны, за время Δt из сосуда вытекает $2\Delta t$ литров раствора. В момент t во всем сосуде (10 *л*) содержится $y(t)$ *кг* соли, следовательно, в $2\Delta t$ литрах вытекающего раствора содержалось бы $0{,}2\,\Delta t\cdot y(t)$ *кг* соли, если бы за время Δt содержание соли в сосуде не менялось. Но так как оно за это время меняется на величину, бесконечно малую при $\Delta t \to 0$, то в вытекающих $2\Delta t$ литрах содержится $0{,}2\,\Delta t\,(y(t)+\alpha)$ *кг* соли, где $\alpha \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Итак, в растворе, втекающем за промежуток времени $(t, t+\Delta t)$, содержится $0{,}6\,\Delta t$ *кг* соли, а в вытекающем — $0{,}2\,\Delta t\cdot(y(t)+\alpha)$ *кг*. Приращение количества соли за это время $y(t+\Delta t)-y(t)$ равно разности найденных величин, т. е.

$$y(t+\Delta t)-y(t) = 0{,}6\,\Delta t - 0{,}2\,\Delta t\cdot(y(t)+\alpha).$$

Разделим на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. В левой части получится производная $y'(t)$, а в правой получим $0{,}6-0{,}2y(t)$, так как $\alpha \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Итак, имеем дифференциальное уравнение

$$y'(t) = 0{,}6-0{,}2y(t).$$

Решая его, получим

$$y(t) = 3 - Ce^{-0{,}2t}. \tag{1}$$

Так как при $t=0$ соли в сосуде не было, то $y(0)=0$. Полагая в (1) $t=0$, найдем

$$y(0) = 3-C;\quad 0=3-C;\quad C=3.$$

Подставляя это значение C в (1), получим

$$y(t) = 3-3e^{-0{,}2t}.$$

При $t=5$ в сосуде будет

$$y(5) = 3-3e^{-0{,}2\cdot 5} = 3-3e^{-1} \approx 1{,}9 \text{ кг соли.}$$

71. Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная a^2.

72. Найти кривые, для которых сумма катетов треугольника, построенного как в предыдущей задаче, есть величина постоянная, равная b.

73. Найти кривые, обладающие следующим свойством: отрезок оси абсцисс, отсекаемый касательной и нормалью, проведенными из произвольной точки кривой, равен $2a$.

74. Найти кривые, у которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, вдвое меньшую абсциссы точки касания.

75. Найти кривые, обладающие следующим свойством: если через любую точку кривой провести прямые, параллельные осям координат, до встречи с этими осями, то площадь полученного прямоугольника делится кривой в отношении 1:2.

76. Найти кривые, касательные к которым в любой точке образуют равные углы с полярным радиусом и полярной осью.

В задачах **77—79** считать, что втекающий газ (или жидкость) вследствие перемешивания распределяется по всему объему вместилища равномерно.

77. Сосуд объемом в 20 *л* содержит воздух (80% азота и 20% кислорода). В сосуд втекает 0,1 *л* азота в секунду, который непрерывно перемешивается, и вытекает такое же количество смеси. Через сколько времени в сосуде будет 99% азота?

78. В баке находится 100 *л* раствора, содержащего 10 *кг* соли. В бак непрерывно подается вода (5 *л* в минуту), которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает с той же скоростью. Сколько соли в баке останется через час?

79. В воздухе комнаты объемом 200 $м^3$ содержится 0,15% углекислого газа (CO_2). Вентилятор подает в минуту 20 $м^3$ воздуха, содержащего 0,04% CO_2. Через какое время количество углекислого газа в воздухе комнаты уменьшится втрое?

В задачах **80—82** принять, что скорость остывания (или нагревания) тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды.

80. Тело охладилось за 10 мин. от 100° до 60°. Температура окружающего воздуха поддерживается равной 20°. Когда тело остынет до 25°?

81. В сосуд, содержащий 1 *кг* воды при температуре 20°, опущен алюминиевый предмет с массой 0,5 *кг*, удельной теплоемкостью 0,2 и температурой 75°. Через минуту вода нагрелась на 2°. Когда температура воды и предмета будут отличаться одна от другой на 1°? Потерями тепла на нагревание сосуда и прочими пренебречь.

82. Кусок металла с температурой a градусов помещен в печь, температура которой в течение часа равномерно повышается от a градусов до b градусов. При разности температур печи и металла в T градусов металл нагревается со скоростью kT градусов в минуту. Найти температуру металла через час.

83. Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки 1,5 *м/сек*, скорость ее через 4 сек. 1 *м/сек*. Когда скорость уменьшится до 1 *см/сек*? Какой путь может пройти лодка до остановки?

В задачах **84—86** использовать закон радиоактивного распада: количество радиоактивного вещества, распадающегося за единицу времени, пропорционально количеству этого вещества, имеющегося в рассматриваемый момент.

84. За 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько времени останется 1% от первоначального количества?

85. Согласно опытам в течение года из каждого грамма радия распадается 0,44 *мг*. Через сколько лет распадется половина имеющегося количества радия?

86. В исследованном куске горной породы содержится 100 *мг* урана и 14 *мг* уранового свинца. Известно, что уран распадается наполовину за $4{,}5 \cdot 10^9$ лет и что при полном распаде 238 *г* урана образуется 206 *г* уранового свинца. Определить возраст горной породы. Считать, что в момент образования горная порода не содержала свинца, и пренебречь наличием промежуточных радиоактивных продуктов между ураном и свинцом (так как они распадаются намного быстрее урана).

87. Количество света, поглощаемое слоем воды малой толщины, пропорционально количеству падающего на него света и толщине слоя. Слой воды толщиной 35 *см* поглощает половину падающего на него света. Какую часть света поглотит слой толщиной в 2 *м*?

Для составления дифференциального уравнения в задачах **88—90** за неизвестную функцию удобнее взять скорость. Ускорение силы тяжести считать равным 10 *м/сек*^{2}.

88. Парашютист прыгнул с высоты 1,5 *км*, а раскрыл парашют на высоте 0,5 *км*. Сколько времени он падал до раскрытия парашюта? Известно, что предельная скорость падения человека в воздухе нормальной плотности составляет 50 *м/сек*. Изменением плотности с высотой пренебречь. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости.

89. Футбольный мяч весом 0,4 *кГ* брошен вверх со скоростью 20 *м/сек*. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и равно 0,48 *Г* при скорости 1 *м/сек*. Вычислить время подъема мяча и наибольшую высоту подъема. Как изменятся эти результаты, если пренебречь сопротивлением воздуха?

90. Вычислить время падения мяча с высоты 16,3 *м* без начальной скорости с учетом сопротивления воздуха (см. задачу **89**). Найти скорость в конце падения.

В задачах **91—95** принять, что жидкость из сосуда вытекает со скоростью, равной $0{,}6\sqrt{2gh}$, где $g = 10\,\frac{м}{сек^2}$ — ускорение силы тяжести, h — высота уровня воды над отверстием.

91. За какое время вытечет вся вода из цилиндрического бака с диаметром $2R = 1{,}8$ *м* и высотой $H = 2{,}45$ *м* через отверстие в дне диаметром $2r = 6$ *см*? Ось цилиндра вертикальна.

92. Решить предыдущую задачу в предположении, что ось цилиндра расположена горизонтально, а отверстие находится в самой нижней части цилиндра.

93. Цилиндрический бак поставлен вертикально и имеет отверстие в дне. Половина воды из полного бака вытекает за 5 минут. За какое время вытечет вся вода?

94. Воронка имеет форму конуса радиуса $R = 6$ *см* и высоты $H = 10$ *см*, обращенного вершиной вниз. За какое время вытечет вся вода из воронки через круглое отверстие диаметра 0,5 *см*, сделанное в вершине конуса?

95. В прямоугольный бак размером 60 *см* $\times$ 75 *см* и высотой 80 *см* поступает 1,8 *л* воды в секунду. В дне имеется отверстие площадью 2,5 *см*^{2}. За какое время наполнится бак? Сравнить результат с временем наполнения такого бака без отверстия в дне.

96. Резиновый шнур длиной в 1 *м* под действием силы f *кГ* удлиняется на kf метров. На сколько удлинится такой же шнур длины l и веса P под действием своего веса, если его подвесить за один конец?

97. Найти атмосферное давление на высоте h, если на поверхности земли давление равно 1 $кГ/см^2$ и плотность воздуха 0,0012 $г/см^3$. Использовать закон Бойля — Мариотта, в силу которого плотность пропорциональна давлению (т. е. пренебречь изменением температуры воздуха с высотой).

98. Для остановки речных судов у пристани с них бросают канат, который наматывают на столб, стоящий на пристани. Какая сила будет тормозить судно, если канат делает три витка вокруг столба, коэффициент трения каната о столб равен $^1/_3$, и рабочий на пристани тянет за свободный конец каната с силой 10 $кГ$?

99. В закрытом помещении объемом v $м^3$ находится открытый сосуд с водой. Скорость испарения воды пропорциональна разности между количеством q_1 водяного пара, насыщающего 1 $м^3$ воздуха при данной температуре, и количеством q водяного пара, имеющемся в 1 $м^3$ воздуха в рассматриваемый момент (считаем, что температура воздуха и воды, а также величина площади, с которой происходит испарение, остаются неизменными). В начальный момент в сосуде было m_0 грамм воды, а в 1 $м^3$ воздуха q_0 грамм пара. Сколько воды останется в сосуде через промежуток времени t?

100. Масса ракеты с полным запасом топлива равна M, без топлива m, скорость истечения продуктов горения из ракеты равна c, начальная скорость ракеты равна нулю. Найти скорость ракеты после сгорания топлива, пренебрегая силой тяжести и сопротивлением воздуха (формула Циолковского).

§ 4. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Однородные уравнения могут быть записаны в виде $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$, а также в виде $M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0$, где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — однородные функции одной и той же степени[1]). Чтобы решить однородное уравнение, можно сделать замену $y=tx$, после чего получается уравнение с разделяющимися переменными.

Пример. Решить уравнение $x\,dy=(x+y)\,dx$.

Это уравнение — однородное. Полагаем $y=tx$. Тогда $dy=t\,dx+x\,dt$. Подставляя в уравнение, получим

$$x(x\,dt+t\,dx)=(x+tx)\,dx;\quad x\,dt=dx.$$

Решаем полученное уравнение с разделяющимися переменными

$$dt=\frac{dx}{x};\quad t=\ln|x|+C.$$

[1]) Функция $M(x, y)$ называется однородной функцией степени n, если для всех k имеем $M(kx, ky)=k^nM(x, y)$.

Возвращаясь к старому переменному y, получим $y=x(\ln|x|+C)$. Кроме того, имеется решение $x=0$, которое было потеряно при делении на x.

2. Уравнение вида $y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}\right)$ приводится к однородному с помощью переноса начала координат в точку пересечения прямых $ax+by+c=0$ и $a_1x+b_1y+c_1=0$. Если же эти прямые не пересекаются, то $a_1x+b_1y=k(ax+by)$; следовательно, уравнение имеет вид $y'=F(ax+by)$ и приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $z=ax+by$ (или $z=ax+by+c$) см. § 2, п. 2.

3. Некоторые уравнения можно привести к однородным заменой $y=z^m$. Число m обычно заранее неизвестно. Чтобы его найти, надо в уравнении сделать замену $y=z^m$. Требуя, чтобы уравнение было однородным, найдем число m, если это возможно. Если же этого сделать нельзя, то уравнение не приводится к однородному этим способом.

Пример. Дано уравнение

$$2x^4yy'+y^4=4x^6.$$

После замены $y=z^m$ уравнение примет вид

$$2mx^4z^{2m-1}z'+z^{4m}=4x^6.$$

Это уравнение будет однородным в том случае, когда степени всех его членов равны между собой, т. е.

$$4+(2m-1)=4m=6.$$

Эти равенства удовлетворяются одновременно, если $m=^3/_2$. Следовательно, уравнение можно привести к однородному заменой $y=z^{\frac{3}{2}}$.

Решить уравнения **101—129.**

101. $(x+2y)\,dx-x\,dy=0$.

102. $(x-y)\,dx+(x+y)\,dy=0$.

103. $(y^2-2xy)\,dx+x^2\,dy=0$.

104. $2x^3y'=y(2x^2-y^2)$.

105. $y^2+x^2y'=xyy'$.

106. $(x^2+y^2)\,y'=2xy$.

107. $xy'-y=x\operatorname{tg}\frac{y}{x}$.

108. $xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}$.

109. $xy'-y=(x+y)\ln\frac{x+y}{x}$.

110. $xy'=y\cos\ln\frac{y}{x}$.

111. $(y+\sqrt{xy})\,dx=x\,dy$.

112. $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$.

113. $(2x-4y+6)\,dx+(x+y-3)\,dy=0$.

114. $(2x+y+1)\,dx-(4x+2y-3)\,dy=0$.

115. $x-y-1+(y-x+2)\,y'=0$.

116. $(x+4y)y' = 2x+8y-5$.

117. $(y+2)\,dx = (2x+y-4)\,dy$.

118. $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

119. $(y'+1)\ln\frac{y+x}{x+3} = \frac{y+x}{x+3}$.

120. $y' = \frac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg}\frac{y-2x}{x+1}$.

121. $x^3(y'-x) = y^2$. 122. $2x^2y' = y^3 + xy$.

123. $2x\,dy + (x^2y^4+1)\,y\,dx = 0$.

124. $y\,dx + x\,(2xy+1)\,dy = 0$.

125. $2y' + x = 4\sqrt{y}$. 126. $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$.

127. $2xy' + y = y^2\sqrt{x - x^2y^2}$.

128. $\frac{2}{3}xyy' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2$.

129. $2y + (x^2y+1)\,xy' = 0$.

130. Найти траектории, пересекающие кривые данного семейства под углом в 45°, причем этот угол от касательной к кривой до касательной к траектории отсчитывается в отрицательном направлении.

а) $y = x\ln Cx$; б) $(x-3y)^4 = Cxy^6$.

131. Найти кривую, у которой точка пересечения любой касательной с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и от начала координат.

132. Найти кривую, у которой расстояние любой касательной от начала координат равно абсциссе точки касания.

133. При каких α и β уравнение $y' = ax^\alpha + by^\beta$ приводится к однородному с помощью замены $y = z^m$?

134*. Пусть k_0 — корень уравнения $f(k) = k$. Показать, что:

1) если $f'(k_0) < 1$, то ни одно решение уравнения $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ не касается прямой $y = k_0x$ в начале координат;

2) если $f'(k_0) > 1$, то этой прямой касается бесконечно много решений.

135*. Вывести условие, необходимое и достаточное для того, чтобы все решения однородного уравнения $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ изображались замкнутыми кривыми, окружающими начало координат.

Указание. Перейти к полярным координатам.

§ 5. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1. Уравнение

$$y' + a(x)\,y = b(x) \tag{1}$$

называется линейным. Чтобы его решить, надо сначала решить уравнение

$$y' + a(x)\,y = 0 \tag{2}$$

(это делается путем разделения переменных, см. § 2) и в общем решении последнего заменить произвольную постоянную C на неизвестную функцию $C(x)$. Затем выражение, полученное для y, подставить в уравнение (1) и найти функцию $C(x)$.

2. Некоторые уравнения становятся линейными, если поменять местами искомую функцию и независимое переменное. Например, уравнение $y = (2x+y^3)\,y'$, в котором y является функцией от x, — нелинейное. Запишем его в дифференциалах:

$$y\,dx - (2x+y^3)\,dy = 0.$$

Так как в это уравнение x и dx входят линейно, то уравнение будет линейным, если x считать искомой функцией, а y — независимым переменным. Это уравнение может быть записано в виде

$$\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = y^2$$

и решается аналогично уравнению (1).

3. Чтобы решить уравнение Бернулли, т. е. уравнение

$$y' + a(x)\,y = b(x)\,y^n,$$

надо обе его части разделить на y^n и сделать замену $\frac{1}{y^{n-1}} = z$. После замены получается линейное уравнение, которое можно решить изложенным выше способом. (Пример см. в [1], гл. I, § 4, п. 2, пример 10.)

4. Уравнение Риккати, т. е. уравнение

$$y' + a(x)\,y + b(x)\,y^2 = c(x),$$

в общем случае не решается в квадратурах. Если же известно одно частное решение $y_1(x)$, то заменой $y = y_1(x) + z$ уравнение Риккати сводится к уравнению Бернулли и таким образом может быть решено в квадратурах.

Иногда частное решение удается подобрать, исходя из вида свободного члена уравнения (члена, не содержащего y). Например, для уравнения $y' + y^2 = x^2 - 2x$ в левой части будут члены, подобные членам правой части, если взять $y = ax + b$. Подставляя в уравнение и приравнивая коэффициенты при подобных членах, найдем a и b (если частное решение указанного вида существует, что вовсе не всегда бывает). Другой пример: для уравнения $y' + 2y^2 = \frac{6}{x^2}$ те же рассуждения побуждают нас искать частное решение в виде $y = \frac{a}{x}$. Подставляя $y = \frac{a}{x}$ в уравнение, найдем постоянную a.

Решить уравнения 136—160.

136. $xy'-2y=2x^4$.
137. $(2x+1)y'=4x+2y$.
138. $y'+y\operatorname{tg}x=\sec x$.
139. $x(y'-y)=e^x$.
140. $x^2y'+xy+1=0$.
141. $y=x(y'-x\cos x)$.
142. $y'=2x(x^2+y)$.
143. $(xy'-1)\ln x=2y$.
144. $xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x}$.
145. $(x+y^2)\,dy=y\,dx$.
146. $(2e^y-x)\,y'=1$.
147. $(\sin^2 y+x\operatorname{ctg}y)\,y'=1$.
148. $(2x+y)\,dy=y\,dx+4\ln y\,dy$.
149. $y'=\dfrac{y}{3x-y^2}$.
150. $(1-2xy)\,y'=y(y-1)$.
152. $(x+1)(y'+y^2)=-y$.
151. $y'+2y=y^2e^x$.
154. $xy^2y'=x^2+y^3$.
153. $y'=y^4\cos x+y\operatorname{tg}x$.
156. $xy'-2x^2\sqrt{y}=4y$.
155. $xy\,dy=(y^2+x)\,dx$.
157. $xy'+2y+x^5y^3e^x=0$.
158. $2y'-\dfrac{x}{y}=\dfrac{xy}{x^2-1}$.
159. $y'x^3\sin y=xy'-2y$.
160. $(2x^2y\ln y-x)\,y'=y$.

С помощью замены переменных или дифференцировании привести уравнения 161—166 к линейным и решить их.

161. $x\,dx=(x^2-2y+1)\,dy$.
162. $(x+1)(yy'-1)=y^2$.
163. $x(e^y-y')=2$.
164. $(x^2-1)\,y'\sin y+2x\cos y=2x-2x^3$.
165. $y(x)=\int\limits_0^x y(t)\,dt+x+1$.
166. $\int\limits_0^x (x-t)\,y(t)\,dt=2x+\int\limits_0^x y(t)\,dt$.

В задачах 167—171, найдя путем подбора частное решение, привести данные уравнения Риккати к уравнениям Бернулли и решить их.

167. $x^2y'+xy+x^2y^2=4$.
168. $3y'+y^2+\dfrac{2}{x^2}=0$.
169. $xy'-(2x+1)\,y+y^2=-x^2$.
170. $y'-2xy+y^2=5-x^2$.
171. $y'+2ye^x-y^2=e^{2x}+e^x$.

172. Найти траектории, ортогональные к линиям семейства

$$y^2=Ce^x+x+1.$$

173. Найти кривые, у которых площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной и ординатой точки касания, есть величина постоянная, равная $3a^2$.

174. Найти кривые, у которых площадь треугольника, ограниченного касательной, осью абсцисс и отрезком от начала координат до точки касания, есть величина постоянная, равная a^2.

175. В баке находится 100 *л* раствора, содержащего 10 *кг* соли. В бак втекает 5 *л* воды в минуту, а смесь с той же скоростью переливается в другой 100-литровый бак, первоначально наполненный чистой водой. Избыток жидкости из него выливается. Когда количество соли во втором баке будет наибольшим? Чему оно равно?

176. За время Δt (где Δt очень мало и выражено в долях года) из каждого грамма радия распадается $0{,}00044\,\Delta t$ грамма и образуется $0{,}00043\,\Delta t$ грамма радона. Из каждого грамма радона за время Δt распадается $70\Delta t$ грамма. В начале опыта имелось некоторое количество x_0 чистого радия. Когда количество образовавшегося и еще не распавшегося радона будет наибольшим?

177*. Оценить приблизительно, когда количество радона превзойдет 99% от этого максимального значения и когда оно вновь снизится ниже 99% от этого значения.

178. Найти то решение уравнения

$$y'\sin 2x=2(y+\cos x),$$

которое остается ограниченным при $x\to\pi/2$.

179*. Показать, что уравнение

$$\frac{dx}{dt}+x=f(t),$$

где $|f(t)|\leqslant M$ при $-\infty<t<+\infty$, имеет одно решение, ограниченное при $-\infty<t<+\infty$. Найти это решение. Показать, что найденное решение периодическое, если функция $f(t)$ периодическая.

180*. Пусть в уравнении

$$\frac{dx}{dt}+a(t)\,x=f(t)$$

$a(t)\geqslant c>0$, $f(t)\to 0$ при $t\to+\infty$. Доказать, что каждое решение этого уравнения стремится к нулю при $t\to+\infty$.

181*. Пусть в уравнении предыдущей задачи имеем $a(t)\geqslant c>0$ и пусть $x_0(t)$—решение с начальными условиями $x_0(0)=b$. Показать, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что если изменить функцию $f(t)$ и число b меньше чем на δ (т. е. заменить их на такую функцию $f_1(t)$ и число b_1, что $|f_1(t)-f(t)|<\delta$, $|b_1-b|<\delta$), то решение $x_0(t)$ изменится при $t\geqslant 0$ меньше чем на ε. Это свойство решения называется устойчивостью по постоянно действующим возмущениям.

182*. Пусть в уравнении $xy'+ay=f(x)$ имеем $a=\text{const}>0$, $f(x)\to b$ при $x\to 0$. Показать, что только одно решение уравнения остается ограниченным при $x\to 0$, и найти предел этого решения при $x\to 0$.

183*. Пусть в уравнении предыдущей задачи $a=\text{const}<0$, $f(x)\to b$ при $x\to 0$. Показать, что все решения этого уравнения имеют один и тот же конечный предел при $x\to 0$. Найти этот предел.

184*. Найти периодическое решение уравнения

$$y'=y\cos^2 x+\sin x$$

(выразить это решение через определенный интеграл).

185*. Показать, что только одно решение уравнения

$$xy'-(2x^2+1)y=x^2$$

стремится к конечному пределу при $x\to+\infty$, и найти этот предел. Выразить это решение через интеграл.

§ 6. УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

1. Уравнение

$$M(x,\ y)\,dx+N(x,\ y)\,dy=0 \tag{1}$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $F(x,\ y)$. Это имеет место, если $\dfrac{\partial M}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial N}{\partial x}$. Чтобы решить уравнение (1), надо найти функцию $F(x,\ y)$, от которой полный дифференциал $dF(x,\ y)=F'_x\,dx+F'_y\,dy$ равен левой части уравнения (1). Тогда общее решение уравнения (1) можно написать в виде $F(x,\ y)=C$, где C — произвольная постоянная.

Пример. Решить уравнение

$$(2x+3x^2y)\,dx+(x^3-3y^2)\,dy=0. \tag{2}$$

Так как $\dfrac{\partial}{\partial y}(2x+3x^2y)=3x^2$, $\dfrac{\partial}{\partial x}(x^3-3y^2)=3x^2$, то уравнение (2) является уравнением в полных дифференциалах. Найдем функцию $F(x,\ y)$, полный дифференциал которой $dF=F'_x\,dx+F'_y\,dy$ был бы равен левой части уравнения (2).

Следовательно,

$$F'_x=2x+3x^2y,\qquad F'_y=x^3-3y^2. \tag{3}$$

Интегрируем по x первое из уравнений (3), считая y постоянным; при этом вместо постоянной интегрирования надо поставить $\varphi(y)$ — неизвестную функцию от y.

$$F=\int(2x+3x^2y)\,dx=x^2+x^3y+\varphi(y).$$

Подставляя это выражение для F во второе из уравнений (3), найдем $\varphi(y)$:

$$(x^2+x^3y+\varphi(y))'_y=x^3-3y^2;\quad \varphi'(y)=-3y^2;$$
$$\varphi(y)=-y^3+\text{const}.$$

Следовательно, можно взять $F(x,\ y)=x^2+x^3y-y^3$, и общее решение уравнения (2) будет иметь вид

$$x^2+x^3y-y^3=C.$$

2. Интегрирующим множителем для уравнения

$$M(x,\ y)\,dx+N(x,\ y)\,dy=0 \tag{4}$$

называется такая функция $m(x,\ y)\not\equiv 0$, после умножения на которую уравнение (4) превращается в уравнение в полных дифференциалах. Следовательно, интегрирующий множитель должен удовлетворять уравнению в частных производных

$$(mM)'_y=(mN)'_x. \tag{5}$$

Если функции M и N в уравнении (4) имеют непрерывные частные производные и не обращаются в нуль одновременно, то интегрирующий множитель существует. Однако нет общего метода для его отыскания (когда общее решение уравнения (4) неизвестно). В некоторых случаях бывают полезны следующие приемы:

а) Написав какое-нибудь выражение $z=\varphi(x,\ y)$, зависящее от x и y $\left(\text{в частности, можно взять } z=x, \text{ или } z=y, \text{ или } z=xy, \text{ или } z=\dfrac{x}{y} \text{ и т. п.}\right)$, можно узнать, существует ли интегрирующий множитель, зависящий только от z, и если существует, найти его. Для этого надо в уравнение (5) подставить $m=m(z)$. Если в полученном уравнении удается избавиться от x и y, т. е. привести уравнение к виду

$$F(m,\ m'_z,\ z)=0, \tag{6}$$

то интегрирующий множитель, зависящий только от z, существует, и его можно найти из уравнения (6).

Пример. Дано уравнение

$$(y^4-4xy)\,dx+(2xy^3-3x^2)\,dy=0. \tag{7}$$

Существует ли интегрирующий множитель, зависящий только от $z=xy$? Для решения этого вопроса умножим уравнение (7) на $m=m(z)$ и напишем условие полного дифференциала (5)

$$[m(y^4-4xy)]'_y=[m(2xy^3-3x^2)]'_x.$$

Так как $m'_x=m'_z\cdot z'_x=m'_z\cdot y$, $m'_y=m'_z\cdot z'_y=m'_z\cdot x$, то мы получим после упрощений

$$m'_z\cdot xy(y^3+x)=m\cdot 2(y^3+x).$$

Заменяя xy на z и сокращая на y^3+x, получим

$$m'_z\cdot z=2m. \tag{8}$$

Так как удалось избавиться от x и y, то интегрирующий множитель, зависящий только от z, существует. Из уравнения (8) получим $m=Cz^2$. Постоянная C — произвольна. Взяв $C=1$, получим, что $m=x^2y^2$ — интегрирующий множитель для уравнения (7).

б) Если уравнение (5) приведено к виду

$$d\varphi(x, y)+M_1(x, y)\,dx+N_1(x, y)\,dy=0, \tag{9}$$

где $d\varphi(x, y)$ — полный дифференциал от некоторой функции $\varphi(x, y)$, то можно пытаться искать для вспомогательного уравнения $M_1(x, y)\,dx+N_1(x, y)\,dy=0$ интегрирующий множитель, зависящий только от z, где $z=\varphi(x, y)$ (см. пункт а)). Если такой интегрирующий множитель существует, то он же будет интегрирующим множителем и для уравнения (9).

Пример. Дано уравнение

$$(xy+y^4)\,dx+(x^2-xy^3)\,dy=0.$$

Сгруппировав члены одинаковых степеней, получим

$$x(y\,dx+x\,dy)+y^3(y\,dx-x\,dy)=0.$$

Разделим на x, чтобы выделить полный дифференциал

$$d(xy)+\frac{y^3}{x}(y\,dx-x\,dy)=0. \tag{10}$$

Ищем для уравнения

$$\frac{y^3}{x}(y\,dx-x\,dy)=0 \tag{11}$$

интегрирующий множитель, зависящий только от $z=xy$ (методом, изложенным в пункте а)). Получим $m=\frac{1}{z^2}=\frac{1}{x^2y^2}$. Умножая уравнение (10) на этот множитель, получим уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{d(xy)}{x^2y^2}+\frac{y^2}{x^3}\,dx-\frac{y}{x^2}\,dy=0.$$

в) Еще один способ отыскания интегрирующего множителя, основанный на формуле, дающей общий вид интегрирующего множителя, см. в [1], гл. II, § 3, п. 3 (конец).

г) Если в уравнении (4) можно выделить полный дифференциал некоторой функции $\varphi(x, y)$, то иногда уравнение упрощается, если от переменных (x, y) перейти к переменным (x, z) или (y, z), где $z=\varphi(x, y)$.

В некоторых других случаях удобнее перейти от переменных (x, y) к переменным (u, v), где $u=\varphi(x, y)$, $v=\psi(x, y)$.

Пример. Рассмотрим снова уравнение (10). Так как $y\,dx-x\,dy=y^2d\left(\frac{x}{y}\right)$, то уравнение принимает вид

$$d(xy)+\frac{y^5}{x}d\left(\frac{x}{y}\right)=0.$$

Сделав замену $xy=u$, $\frac{x}{y}=v$, получим уравнение $du+\frac{u^2}{v^3}dv=0$, которое легко решается.

В задачах **186—194** проверить, что данные уравнения являются уравнениями в полных дифференциалах, и решить их.

186. $2xy\,dx+(x^2-y^2)\,dy=0.$
187. $(2-9xy^2)\,x\,dx+(4y^2-6x^3)\,y\,dy=0.$
188. $e^{-y}\,dx-(2y+xe^{-y})\,dy=0.$
189. $\frac{y}{x}\,dx+(y^3+\ln x)\,dy=0.$
190. $\frac{3x^2+y^2}{y^2}\,dx-\frac{2x^3+5y}{y^3}\,dy=0.$
191. $2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx-\sqrt{x^2-y}\,dy=0.$
192. $(1+y^2\sin 2x)\,dx-2y\cos^2 x\,dy=0.$
193. $3x^2(1+\ln y)\,dx=\left(2y-\frac{x^3}{y}\right)dy.$
194. $\left(\frac{x}{\sin y}+2\right)dx+\frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}\,dy=0.$

Решить уравнения **195—220**, найдя каким-либо способом интегрирующий множитель или сделав замену переменных.

195. $(x^2+y^2+x)\,dx+y\,dy=0.$
196. $(x^2+y^2+y)\,dx-x\,dy=0.$
197. $x\,dx=(x\,dy+y\,dx)\sqrt{1+x^2}.$
198. $xy^2(xy'+y)=1.$
199. $y^2\,dx-(xy+x^3)\,dy=0.$
200. $\left(y-\frac{1}{x}\right)dx+\frac{dy}{y}=0.$
201. $(x^2+3\ln y)\,y\,dx=x\,dy.$
202. $y^2\,dx+(xy+\operatorname{tg} xy)\,dy=0.$

203. $y(x+y)\,dx+(xy+1)\,dy=0$.
204. $y(y^2+1)\,dx+x(y^2-x+1)\,dy=0$.
205. $(x^2+2x+y)\,dx=(x-3x^2y)\,dy$.
206. $y\,dx-x\,dy=2x^3\operatorname{tg}\frac{y}{x}\,dx$.
207. $y^2\,dx+(e^x-y)\,dy=0$.
208. $xy\,dx=(y^3+x^2y+x^2)\,dy$.
209. $x^2y(y\,dx+x\,dy)=2y\,dx+x\,dy$.
210. $(x^2-y^2+y)\,dx+x(2y-1)\,dy=0$.
211. $(2x^2y^2+y)\,dx+(x^3y-x)\,dy=0$.
212. $(2x^2y^3-1)\,y\,dx+(4x^2y^3-1)\,x\,dy=0$.
213. $y(x+y^2)\,dx+x^2(y-1)\,dy=0$.
214. $(x^2-\sin^2 y)\,dx+x\sin 2y\,dy=0$.
215. $x(\ln y+2\ln x-1)\,dy=2y\,dx$.
216. $(x^2+1)(2x\,dx+\cos y\,dy)=2x\sin y\,dx$.
217. $(2x^3y^2-y)\,dx+(2x^2y^3-x)\,dy=0$.
218. $x^2y^3+y+(x^3y^2-x)\,y'=0$.
219. $(x^2-y)\,dx+x(y+1)\,dy=0$.
220. $y^2(y\,dx-2x\,dy)=x^3(x\,dy-2y\,dx)$.

§ 7. ВОПРОСЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

Перейдя от дифференциального уравнения к интегральному, построить последовательные приближения к решению с данными начальными условиями. Оценить, на каком отрезке теорема Пикара обеспечивает существование решения и сходимость последовательных приближений (см. [1], гл. II, § 1, п. 1).

221. $y'=x-y^2$, $y(0)=0$. Найти y_0, y_1, y_2, y_3.

222. $y'=y^2-3x^2-1$, $y(0)=1$. Найти y_0, y_1, y_2.

223. $y'=y+e^y$, $y(0)=1$. Найти y_0, y_1, y_2.

224*. Оценить ошибку приближения y_3 в задаче **221** при $x=0{,}5$ и при $x=1$.

Указание. Оценить остаток ряда, сходимость которого доказывается в теореме существования решения.

225*. Доказать, что решение уравнения $y'=x^3-y^3$ с произвольным начальным условием $y(x_0)=y_0$ существует при $x_0\leqslant x<\infty$.

В задачах **226—240**, пользуясь каким-либо достаточным условием единственности (см., например, [1], гл. II, § 1, пп. 1, 2 и гл. III, § 4, п. 1 (мелкий шрифт); [2], §§ 4, 13), выделить области, в которых сохраняется единственность решения для данных уравнений. В задачах **229** и **230** правые части уравнений при $y=0$ доопределяются по непрерывности.

226. $y'=2xy+y^2$.	227. $y'=3\sqrt[3]{y^2}$.
228. $y'=3\sqrt[3]{y^2}+1$.	229. $y'=y\ln y$.
230. $y'=y\ln^2 y$.	231. $y'=\sqrt[3]{y}+x$.
232. $y'=\frac{y+2}{x+y}$.	233. $y'=\frac{x+2y-4}{x-y-1}$.
234. $y'=\operatorname{tg} y+1$.	235. $y'=\sqrt{\sin y}$.
236. $y'=2+\sqrt[3]{y-2x}$.	237. $y'=\sqrt{x+2y}-x$.
238. $y'=\sin x+\cos y$.	239. $y'=\frac{\sqrt{y}-x}{x-2}$.
240. $xy'=y+\sqrt{y^2-x^2}$.	

§ 8. УРАВНЕНИЯ, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

1. Уравнения вида $F(x, y, y')=0$ можно решать следующими методами.

а) Разрешить уравнение относительно y', т. е. из уравнения $F(x, y, y')=0$ выразить y' через x и y. Получится одно или несколько уравнений вида $y'=f(x, y)$. Каждое из них надо решить.

б) Метод введения параметра [1]).

Пусть уравнение $F(x, y, y')=0$ можно разрешить относительно y, т. е. записать в виде $y=f(x, y')$. Введя параметр

$$p=\frac{dy}{dx}=y', \qquad (1)$$

получим

$$y=f(x, p). \qquad (2)$$

Взяв полный дифференциал от обеих частей равенства (2) и заменив dy через $p\,dx$ (в силу (1)), получим уравнение вида

$$M(x, p)\,dx+N(x, p)\,dp=0.$$

Если решение этого уравнения найдено в виде $x=\varphi(p)$, то, воспользовавшись равенством (2), получим решение исходного уравнения в параметрической записи: $x=\varphi(p)$, $y=f(\varphi(p), p)$.

[1]) Здесь излагается простейший вариант этого метода. Более общий вариант см. [1], гл. III, § 3, п. 1.

Уравнения вида $x=f(y, y')$ решаются тем же методом.

Примеры применения этого метода см. [1], гл. III, § 3, пп. 1, 2.

2. Решение $y=\varphi(x)$ уравнения $F(x, y, y')=0$ называется *особым*, если через каждую его точку, кроме этого решения, проходит и другое решение, имеющее в этой точке ту же касательную, что и решение $y=\varphi(x)$, но не совпадающее с ним в сколь угодно малой окрестности этой точки [1]).

Если функция $F(x, y, y')$ и производные $\frac{\partial F}{\partial y}$ и $\frac{\partial F}{\partial y'}$ непрерывны, то любое особое решение уравнения

$$F(x, y, y')=0 \qquad (3)$$

удовлетворяет также уравнению

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'}=0. \qquad (4)$$

Поэтому, чтобы отыскать особые решения уравнения (3), надо исключить y' из уравнений (3) и (4). Полученное уравнение $\psi(x, y)=0$ называется уравнением *дискриминантной* кривой. Для каждой ветви дискриминантной кривой надо проверить, является ли эта ветвь решением уравнения (3), и если является, то будет ли это решение особым, т. е. нарушается ли единственность в каждой его точке. Исследование единственности легко проводится в тех задачах, в которых удается найти общее решение.

3. Если семейство кривых $\Phi(x, y, C)=0$, являющихся решениями уравнения $F(x, y, y')=0$, имеет огибающую $y=\varphi(x)$, то эта огибающая является особым решением того же уравнения. Если функция Φ имеет непрерывные первые производные, то для отыскания огибающей надо исключить C из уравнений

$$\Phi(x, y, C)=0, \quad \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C}=0$$

и проверить, будет ли полученная кривая огибающей.

В задачах **241—250** найти все решения данных уравнений; выделить особые решения (если они есть); дать чертеж.

241. $y'^2-y^2=0$. **242.** $8y'^3=27y$.

243. $(y'+1)^3=27(x+y)^2$. **244.** $y^2(y'^2+1)=1$.

245. $y'^2-4y^3=0$. **246.** $y'^2=4y^3(1-y)$.

247. $xy'^2=y$. **248.** $yy'^2+x=1$.

249. $y'^3+y^2=yy'(y'+1)$. **250.** $4(1-y)=(3y-2)^2y'^2$.

Уравнения **251—266** разрешить относительно y', после этого общее решение искать обычными методами. Найти также особые решения, если они есть.

---

[1]) Это определение взято из [1]. Есть и другие определения, не равносильные этому.

251. $y'^2+xy=y^2+xy'$. **252.** $xy'(xy'+y)=2y^2$.

253. $xy'^2-2yy'+x=0$. **254.** $xy'^2=y(2y'-1)$.

255. $y'^2+x=2y$. **256.** $y'^3+(x+2)e^y=0$.

257. $y'^2-2xy'=8x^2$. **258.** $(xy'+3y)^2=7x$.

259. $y'^2-2yy'=y^2(e^x-1)$. **260.** $y'(2y-y')=y^2\sin^2 x$.

261. $y'^4+y^2=y^4$.

262. $x(y-xy')^2=xy'^2-2yy'$.

263. $y(xy'-y)^2=y-2xy'$. **264.** $yy'(yy'-2x)=x^2-2y^2$.

265. $y'^2+4xy'-y^2-2x^2y=x^4-4x^2$.

266. $y(y-2xy')^2=2y'$.

Уравнения **267—286** решить методом введения параметра.

267. $x=y'^3+y'$. **268.** $x(y'^2-1)=2y'$.

269. $x=y'\sqrt{y'^2+1}$. **270.** $y'(x-\ln y')=1$.

271. $y=y'^2+2y'^3$. **272.** $y=\ln(1+y'^2)$.

273. $(y'+1)^3=(y'-y)^2$. **274.** $y=(y'-1)e^{y'}$.

275. $y'^4-y'^2=y^2$. **276.** $y'^2-y'^3=y^2$.

277. $y'^4=2yy'+y^2$. **278.** $y'^2-2xy'=x^2-4y$.

279. $5y+y'^2=x(x+y')$. **280.** $x^2y'^2=xyy'+1$.

281. $y'^2+y^2=xyy'$. **282.** $2xy'-y=y'\ln yy'$.

283. $y'=e^{\frac{xy'}{y}}$. **284.** $y=xy'-x^2y'^3$.

285. $y=2xy'+y^2y'^3$. **286.** $y(y-2xy')^3=y'^2$.

Решить уравнения Лагранжа и Клеро (задачи **287—297**).

287. $y=xy'-y'^2$. **288.** $y+xy'=4\sqrt{y'}$.

289. $y=3xy'-7y'^3$. **290.** $y=xy'-(2+y')$.

291. $x(y'^2+1)=2yy'$. **292.** $y=xy'^2-2y'^3$.

293. $xy'-y=\ln y'$. **294.** $xy'(y'+2)=y$.

295. $2y'^2(y-xy')=1$. **296.** $2xy'-y=\ln y'$.

297. $y'^3=3(xy'-y)$.

298. Найти кривую, каждая касательная к которой образует с осями координат треугольник площади $2a^2$.

299. Найти кривую, каждая касательная к которой отсекает на осях координат такие отрезки, что сумма величин, обратных квадратам длин этих отрезков, равна 1.

300. Найти кривую, проходящую через начало координат и такую, что отрезок нормали к ней, отсекаемый сторонами первого координатного угла, имеет постоянную длину, равную 2.

§ 9. РАЗНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА[1])

Решить уравнения **301—330** и построить графики их решений.

301. $xy'+x^2+xy-y=0$. **302.** $2xy'+y^2=1$.

303. $(2xy^2-y)\,dx+x\,dy=0$.

304. $(xy'+y)^2=x^2y'$. **305.** $y-y'=y^2+xy'$.

306. $(x+2y^3)\,y'=y$. **307.** $y'^3-y'e^{2x}=0$.

308. $x^2y'=y\,(x+y)$. **309.** $(1-x^2)\,dy+xy\,dx=0$.

310. $y'^2+2\,(x-1)\,y'-2y=0$.

311. $y+y'\ln^2 y=(x+2\ln y)\,y'$.

312. $x^2y'-2xy=3y$. **313.** $x+yy'=y^2\,(1+y'^2)$.

314. $y=(xy'+2y)^2$. **315.** $y'=\dfrac{1}{x-y^2}$.

316. $y'^3+(3x-6)\,y'=3y$. **317.** $x-\dfrac{y}{y'}=\dfrac{2}{y}$.

318. $2y'^3-3y'^2+x=y$. **319.** $(x+y)^2y'=1$.

320. $2x^3yy'+3x^2y^2+7=0$. **321.** $\dfrac{dx}{x}=\left(\dfrac{1}{y}-2x\right)dy$.

322. $xy'=e^y+2y'$. **323.** $2\,(x-y^2)\,dy=y\,dx$.

324. $x^2y'^2+y^2=2x\,(2-yy')$.

325. $dy+(xy-xy^3)\,dx=0$. **326.** $2x^2y'=y^2\,(2xy'-y)$.

327. $\dfrac{y-xy'}{x+yy'}=2$. **328.** $x\,(x-1)\,y'+2xy=1$.

329. $xy\,(xy'-y)^2+2y'=0$. **330.** $(1-x^2)\,y'-2xy^2=xy$.

Решить уравнения **331—420**.

331. $y'+y=xy^3$.

332. $(xy^2-x)\,dx+(y+xy)\,dy=0$.

333. $(\sin x+y)\,dy+(y\cos x-x^2)\,dx=0$.

334. $3y'^3-xy'+1=0$. **335.** $yy'+y^2\operatorname{ctg}x=\cos x$.

336. $(e^y+2xy)\,dx+(e^y+x)\,x\,dy=0$.

337. $xy'^2=y-y'$. **338.** $x\,(x+1)\,(y'-1)=y$.

339. $y\,(y-xy')=\sqrt{x^4+y^4}$. **340.** $xy'+y=\ln y'$.

[1]) Все задачи § 9 решаются изложенными ранее методами.

341. $x^2\,(dy-dx)=(x+y)\,y\,dx$.

342. $y'+x\sqrt[3]{y}=3y$. **343.** $(x\cos y+\sin 2y)\,y'=1$.

344. $y'^2-yy'+e^x=0$. **345.** $y'=\dfrac{x}{y}e^{2x}+y$.

346. $(xy'-y)^3=y'^3-1$. **347.** $(4xy-3)\,y'+y^2=1$.

348. $y'\sqrt{x}=\sqrt{y-x}+\sqrt{x}$. **349.** $xy'=2\sqrt{y}\cos x-2y$.

350. $3y'^4=y'+y$. **351.** $y^2\,(y-xy')=x^3y'$.

352. $y'=(4x+y-3)^2$.

353. $(\cos x-x\sin x)\,y\,dx+(x\cos x-2y)\,dy=0$.

354. $x^2y'^2-2xyy'=x^2+3y^2$.

355. $\dfrac{xy'}{y}+2xy\ln x+1=0$. **356.** $xy'=x\sqrt{y-x^2}+2y$.

357. $(1-x^2y)\,dx+x^2\,(y-x)\,dy=0$.

358. $(2xe^y+y^4)\,y'=ye^y$. **359.** $xy'\,(\ln y-\ln x)=y$.

360. $2y'=x+\ln y'$.

361. $(2x^2y-3y^2)\,y'=6x^2-2xy^2+1$.

362. $yy'=4x+3y-2$.

363. $y^2y'+x^2\sin^3 x=y^3\operatorname{ctg}x$.

364. $2xy'-y=\sin y'$.

365. $(x^2y^2+1)\,y+(xy-1)^2\,xy'=0$.

366. $y\sin x+y'\cos x=1$.

367. $x\,dy-y\,dx=x\sqrt{x^2+y^2}\,dx$.

368. $y^2+x^2y'^5=xy\,(y'^2+y'^3)$.

369. $y'=\sqrt[3]{2x-y}+2$.

370. $\left(x-y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+x\cos\dfrac{y}{x}\,dy=0$.

371. $2\,(x^2y+\sqrt{1+x^4y^2})\,dx+x^3\,dy=0$.

372. $(y'-x\sqrt{y})\,(x^2-1)=xy$.

373. $y'^3+(y'^2-2y')\,x=3y'-y$.

374. $(2x+3y-1)\,dx+(4x+6y-5)\,dy=0$.

375. $(2xy^2-y)\,dx+(y^2+x+y)\,dy=0$.

376. $y=y'\sqrt{1+y'^2}$. **377.** $y^2=(xyy'+1)\ln x$.

378. $4y=x^2+y'^2$.

379. $2x\,dy+y\,dx+xy^2\,(x\,dy+y\,dx)=0$.

380. $x\,dx+(x^2\operatorname{ctg}y-3\cos y)\,dy=0$.

381. $x^2y'^2-2(xy-2)y'+y^2=0$.

382. $xy'+1=e^{x-y}$. 383. $y'=\operatorname{tg}(y-2x)$.

384. $3x^2-y=y'\sqrt{x^2+1}$. 385. $yy'+xy=x^3$.

386. $x(x-1)y'+y^3=xy$. 387. $xy'=2y+\sqrt{1+y'^2}$.

388. $(2x+y+5)y'=3x+6$. 389. $y'+\operatorname{tg} y=x\sec y$.

390. $y'^4=4y(xy'-2y)^2$. 391. $y'=\dfrac{y^2-x}{2y(x+1)}$.

392. $xy'=x^2e^{-y}+2$. 393. $y'=3x+\sqrt{y-x^2}$.

394. $x\,dy-2y\,dx+xy^2(2x\,dy+y\,dx)=0$.

395. $(x^3-2xy^2)\,dx+3x^2y\,dy=x\,dy-y\,dx$.

896. $(yy')^3=27x(y^2-2x^2)$. 397. $y'-8x\sqrt{y}=\dfrac{4xy}{x^2-1}$.

398. $[2x-\ln(y+1)]\,dx-\dfrac{x+y}{y+1}\,dy=0$.

399. $xy'=(x^2+\operatorname{tg} y)\cos^2 y$. 400. $x^2(y-xy')=yy'^2$.

401. $y'=\dfrac{3x^2}{x^3+y+1}$. 402. $y'=\dfrac{(1+y)^2}{x(y+1)-x^2}$.

403. $(y-2xy')^2=4yy'^3$.

404. $6x^5y\,dx+(y^4\ln y-3x^6)\,dy=0$.

405. $y'=\frac{1}{2}\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}$. 406. $2xy'+1=y+\dfrac{x^2}{y-1}$.

407. $yy'+x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2+y^2}{x}\right)^2$.

408. $y'=\left(\dfrac{3x+y^3-1}{y}\right)^2$.

409. $(x\sqrt{y^2+1}+1)(y^2+1)\,dx=xy\,dy$.

410. $(x^2+y^2+1)yy'+(x^2+y^2-1)x=0$.

411. $y^2(x-1)\,dx=x(xy+x-2y)\,dy$.

412. $(xy'-y)^2=x^2y^2-x^4$.

413. $xyy'-x^2\sqrt{y^2+1}=(x+1)(y^2+1)$.

414. $(x^2-1)y'+y^2-2xy+1=0$.

415. $y'\operatorname{tg} y+4x^3\cos y=2x$.

416. $(xy'-y)^2=y'^2-\dfrac{2yy'}{x}+1$.

417. $(x+y)(1-xy)\,dx+(x+2y)\,dy=0$.

418. $(3xy+x+y)y\,dx+(4xy+x+2y)x\,dy=0$.

419. $(x^2-1)\,dx+(x^2y^2+x^3+x)\,dy=0$.

420. $x(y'^2+e^{2y})=-2y'$.

§ 10. УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

1. Если в уравнение не входит искомая функция y, т. е. оно имеет вид $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)})=0$, то порядок уравнения можно понизить, взяв за новую неизвестную функцию низшую из производных, входящих в уравнение, т. е. сделав замену $y^{(k)}=z$.

2. Если в уравнение не входит независимое переменное x, т. е. уравнение имеет вид $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0$, то порядок уравнения можно понизить, взяв за новое независимое переменное y, а за неизвестную функцию $y'=p(y)$.

Пример. Решить уравнение $2yy''=y'^2+1$.

В уравнение не входит x. Полагаем $y'=p(y)$. Тогда

$$y''=\frac{d(y')}{dx}=\frac{dp(y)}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p'p.$$

Подставляя $y'=p$ и $y''=pp'$ в уравнение, получим $2ypp'=p^2+1$. Порядок уравнения понижен. Решив полученное уравнение, найдем $p=\pm\sqrt{Cy-1}$. Следовательно, $y'=\pm\sqrt{Cy-1}$. Из этого уравнения получим $4(Cy-1)=C^2(x+C_2)$.

3. Если уравнение однородно относительно y и его производных, т. е. не меняется при одновременной замене $y, y', y'' \ldots$ на $ky, ky', ky'', \ldots$, то порядок уравнения понижается подстановкой $y'=yz$, где z — новая неизвестная функция.

4. Порядок уравнения понижается, если оно является однородным относительно x и y в обобщенном смысле, т. е. не меняется от замены x на kx, y на k^my (при этом y' заменяется на $k^{m-1}y'$, y'' — на $k^{m-2}y''$ и т. д.). Чтобы узнать, будет ли уравнение однородным, и найти число m, надо приравнять друг другу показатели степеней, в которых число k будет входить в каждый член уравнения после указанной выше замены. Например, в первый член уравнения $2x^4y''-3y^2=x^4$ после этой замены число k будет входить в степени $4+(m-2)$, во второй — в степени $2m$, в третий — в степени 4. Следовательно, m должно удовлетворять уравнениям

$$4+(m-2)=2m=4.$$

Отсюда $m=2$. Если же полученные уравнения для m будут несовместными, то дифференциальное уравнение не является однородным в указанном смысле.

После того как число m найдено, надо сделать замену переменных $x=e^t$, $y=ze^{mt}$, где $z=z(t)$ — новая неизвестная функция, а t — новое независимое переменное. Получим уравнение, в которое не входит независимое переменное t. Порядок такого уравнения понижается одним из ранее рассмотренных способов.

5. Порядок уравнения легко понижается, если удается преобразовать уравнение к такому виду, что обе его части являлись полными производными по x от каких-нибудь функций. Например, пусть дано уравнение $yy''=y'^2$. Деля обе части на yy', получим

$$\frac{y''}{y'}=\frac{y'}{y};\quad (\ln y')'=(\ln y)';\quad \ln y'=\ln y+\ln C;\quad y'=yC.$$

Порядок уравнения понижен.

Решить уравнения **421—450.**

421. $x^2y'' = y'^2$.
422. $2xy'y'' = y'^2 - 1$.
423. $y^3y'' = 1$.
424. $y'^2 + 2yy'' = 0$.
425. $y'' = 2yy'$.
426. $yy'' + 1 = y'^2$.
427. $y''(e^x + 1) + y' = 0$.
428. $y''' = y''^2$.
429. $yy'' = y'^2 - y'^3$.
430. $y''' = 2(y'' - 1)\operatorname{ctg} x$.
431. $2yy'' = y^2 + y'^2$.
432. $y''^3 + xy'' = 2y'$.
433. $y''^2 + y' = xy''$.
434. $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$.
435. $x^2y''' = y''^2$.
436. $y''^2 = y'^2 + 1$.
437. $y'' = e^y$.
438. $y'' - xy''' + y'''^3 = 0$.
439. $2y'(y'' + 2) = xy''^2$.
440. $y^4 - y^3y'' = 1$.
441. $y'^2 = (3y - 2y')y''$.
442. $y''(2y' + x) = 1$.
443. $y''^2 - 2y'y''' + 1 = 0$.
444. $(1 - x^2)y'' + xy' = 2$.
445. $yy'' - 2yy' \ln y = y'^2$.
446. $(y' + 2y)y'' = y'^2$.
447. $xy'' = y' + x \sin \frac{y'}{x}$.
448. $y'''y'^2 = y''^3$.
449. $yy'' + y = y'^2$.
450. $xy'' = y' + x(y'^2 + x^2)$.

Решить уравнения **451—454**, воспользовавшись формулой, сводящей многократное интегрирование к однократному (см. [1], гл. IV, § 2, п. 1).

451. $xy^{IV} = 1$.
452. $xy'' = \sin x$.
453. $y''' = 2xy''$.
454. $xy^{IV} + y''' = e^x$.

Решить уравнения **455—462**, преобразовав их к такому виду, чтобы обе части уравнения являлись полными производными.

455. $yy''' = y'y''$.
456. $y'y''' = 2y''^2$.
457. $yy'' = y'(y' + 1)$.
458. $5y'''^2 - 3y''y^{IV} = 0$.
459. $yy'' + y'^2 = 1$.
460. $y'' = xy' + y + 1$.
461. $xy'' = 2yy' - y'$.
462. $xy'' - y' = x^2yy'$.

В задачах **463—480** понизить порядок данных уравнений, пользуясь их однородностью, и решить эти уравнения.

463. $xyy'' - xy'^2 = yy'$.
464. $yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x}$.
465. $(x^2 + 1)(y'^2 - yy'') = xyy'$.
466. $xyy'' + xy'^2 = 2yy'$.
467. $x^2yy'' = (y - xy')^2$.

468. $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{y'^2}{y}$.
469. $y(xy'' + y') = xy'^2(1 - x)$.
470. $x^2yy'' + y'^2 = 0$.
471. $x^2(y'^2 - 2yy'') = y^2$.
472. $xyy'' = y'(y + y')$.
473. $4x^2y^3y'' = x^2 - y^4$.
474. $x^3y'' = (y - xy')(y - xy' - x)$.
475. $\frac{y^2}{x^2} + y'^2 = 3xy'' + \frac{2yy'}{x}$.
476. $y'' = \left(2xy - \frac{5}{x}\right)y' + 4y^2 - \frac{4y}{x^2}$.
477. $x^2(2yy'' - y'^2) = 1 - 2xyy'$.
478. $x^2(yy'' - y'^2) + xyy' = (2xy' - 3y)\sqrt{x^3}$.
479. $x^4(y'^2 - 2yy'') = 4x^3yy' + 1$.
480. $yy' + xyy'' - xy'^2 = x^3$.

В задачах **481—500**, понизив порядок данных уравнений, свести их к уравнениям первого порядка.

481. $y''(3 + yy'^2) = y'^4$.
482. $y''^2 - y'y''' = \left(\frac{y'}{x}\right)^2$.
483. $yy' + 2x^2y'' = xy'^2$.
484. $y'^2 + 2xyy'' = 0$.
485. $2xy^2(xy'' + y') + 1 = 0$.
486. $x(y'' + y'^2) = y'^2 + y'$.
487. $y^2(y'y''' - 2y''^2) = y'^4$.
488. $y(2xy'' + y') = xy'^2 + 1$.
489. $y'' + 2yy'^2 = \left(2x + \frac{1}{x}\right)y'$.
490. $y'y''' = y''^2 + y'^2y''$.
491. $yy'' = y'^2 + 2xy^2$.
492. $y''^4 = y'^5 - yy'^3y''$.
493. $2yy''' = y'$.
494. $y'''y'^2 = 1$.
495. $y^2y''' = y'^3$.
496. $x^2yy'' + 1 = (1 - y)xy'$.
497. $y^2(x^3y''' - 2xy' - 3y) = x^3y'(3yy'' - 2y'^2)$.
498. $(y'y''' - 3y''^2)y = y'^5$.
499. $y^2(y'y''' - 2y''^2) = yy'^2y'' + 2y'^4$.
500. $x^2(y^2y''' - y'^3) = 2y^2y' - 3xyy'^2$.

В задачах **501—505** найти решения, удовлетворяющие заданным начальным условиям.

501. $yy''=2xy'^2$; $y(2)=2$, $y'(2)=0{,}5$.

502. $2y'''-3y'^2=0$; $y(0)=-3$, $y'(0)=1$, $y''(0)=-1$.

503. $x^2y''-3xy'=\frac{6y^2}{x^2}-4y$; $y(1)=1$, $y'(1)=4$.

504. $y'''=3yy'$; $y(0)=-2$, $y'(0)=0$, $y''(0)=4{,}5$.

505. $y''\cos y+y'^2\sin y=y'$; $y(-1)=\frac{\pi}{6}$, $y'(-1)=2$.

506. Найти кривые, у которых в любой точке радиус кривизны вдвое больше отрезка нормали, заключенного между этой точкой кривой и осью абсцисс. Рассмотреть два случая: а) кривая обращена выпуклостью к оси абсцисс; б) вогнутостью к оси абсцисс.

507. Найти кривые, у которых радиус кривизны обратно пропорционален косинусу угла между касательной и осью абсцисс.

508. Определить форму равновесия нерастяжимой нити с закрепленными концами, на которую действует нагрузка так, что на каждую единицу длины горизонтальной проекции нагрузка одинакова (цепи цепного моста). Весом самой нити пренебречь.

509. Найти форму равновесия однородной нерастяжимой нити (с закрепленными концами) под действием ее веса.

510*. Доказать, что уравнение движения маятника $y''+\sin y=0$ имеет частное решение $y(x)$, стремящееся к π при $x\to+\infty$.

§ 11. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ [1]

Решить уравнения **511—548.**

511. $y''+y'-2y=0$.
512. $y''+4y'+3y=0$.
513. $y''-2y'=0$.
514. $2y''-5y'+2y=0$.
515. $y''-4y'+5y=0$.
516. $y''+2y'+10y=0$.
517. $y''+4y=0$.
518. $y'''-8y=0$.

[1] О методах решения уравнений этого параграфа см. [1], гл. VI, § 1, пп. 1, 2, 4 или [3], §§ 7, 8, 10. Физические задачи, сводящиеся к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами, помещены в § 17, задачи 851, 852, 861—868.

519. $y^{IV}-y=0$.
520. $y^{IV}+4y=0$.
521. $y^{VI}+64y=0$.
522. $y''-2y'+y=0$.
523. $4y''+4y'+y=0$.
524. $y^{V}-6y^{IV}+9y'''=0$.
525. $y^{VI}-10y'''+9y'=0$.
526. $y^{IV}+2y''+y=0$.
527. $y'''-3y''+3y'-y=0$.
528. $y'''-y''-y'+y=0$.
529. $y^{IV}-5y''+4y=0$.
530. $y^{V}+8y'''+16y'=0$.
531. $y'''-3y'+2y=0$.
532. $y^{IV}+4y''+3y=0$.
533. $y''-2y'-3y=e^{4x}$.
534. $y''+y=4xe^{x}$.
535. $y''-y=2e^{x}-x^2$.
536. $y''+y'-2y=3xe^{x}$.
537. $y''-3y'+2y=\sin x$.
538. $y''+y=4\sin x$.
539. $y''-5y'+4y=4x^2e^{2x}$.
540. $y''-3y'+2y=x\cos x$.
541. $y''+3y'-4y=e^{-4x}+xe^{-x}$.
542. $y''+2y'-3y=x^2e^{x}$.
543. $y''-4y'+8y=e^{2x}+\sin 2x$.
544. $y''-9y=e^{3x}\cos x$.
545. $y''-2y'+y=6xe^{x}$.
546. $y''+y=x\sin x$.
547. $y''+4y'+4y=xe^{2x}$.
548. $y''-5y'=3x^2+\sin 5x$.

В задачах **549—574** для каждого из данных уравнений написать его частное решение с неопределенными коэффициентами (числовых значений коэффициентов не находить).

549. $y''-2y'+2y=e^{x}+x\cos x$.
550. $y''+6y'+10y=3xe^{-3x}-2e^{3x}\cos x$.
551. $y''-8y'+20y=5xe^{4x}\sin 2x$.
552. $y''+7y'+10y=xe^{-2x}\cos 5x$.
553. $y''-2y'+5y=2xe^{x}+e^{x}\sin 2x$.
554. $y''-2y'+y=2xe^{x}+e^{x}\sin 2x$.
555. $y''-8y'+17y=e^{4x}(x^2-3x\sin x)$.
556. $y'''+y'=\sin x+x\cos x$.
557. $y'''-2y''+4y'-8y=e^{2x}\sin 2x+2x^2$.
558. $y''-6y'+8y=5xe^{2x}+2e^{4x}\sin x$.
559. $y''+2y'+y=x(e^{-x}-\cos x)$.
560. $y'''-y''-y'+y=3e^{x}+5x\sin x$.
561. $y''-6y'+13y=x^2e^{3x}-3\cos 2x$.
562. $y''-9y=e^{-3x}(x^2+\sin 3x)$.
563. $y^{IV}+y''=7x-3\cos x$.
564. $y''+4y=\cos x\cdot\cos 3x$.
565. $y'''-4y''+3y'=x^2+xe^{2x}$.

566. $y''-4y'+5y=e^{2x}\sin^2 x$.
567. $y''+3y'+2y=e^{-x}\cos^2 x$.
568. $y''-2y'+2y=(x+e^x)\sin x$.
569. $y^{IV}+5y''+4y=\sin x\cdot\cos 2x$.
570. $y''-3y'+2y=2^x$.
571. $y''-y=4\operatorname{sh} x$.
572. $y''+4y'+3y=\operatorname{ch} x$.
573. $y''+4y=\operatorname{sh} x\cdot\sin 2x$.
574. $y''+2y'+2y=\operatorname{ch} x\cdot\sin x$.

Решить уравнения **575—580** способом вариации постоянных (см. [1], гл. V, § 3, п. 2).

575. $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$. 576. $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{e^x+1}$.
577. $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$. 578. $y''+4y=2\operatorname{tg} x$.
579. $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{x+1}$.
580*. $x^3(y''-y)=x^2-2$.

Найти решения уравнений **581—588**, удовлетворяющие указанным условиям.

581. $y'''-y'=0$; $y(0)=3$, $y'(0)=-1$, $y''(0)=1$.
582. $y''-2y'+y=0$: $y(2)=1$, $y'(2)=-2$.
583. $y''+y=4e^x$; $y(0)=4$, $y'(0)=-3$.
584. $y''-2y'=2e^x$; $y(1)=-1$, $y'(1)=0$.
585. $y''-y=2x$; $y(0)=0$, $y(1)=-1$.
586. $y''+y=1$; $y(0)=0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.
587. $y''+y=1$; $y(0)=0$, $y(\pi)=0$.
588. $y''+y=2x-\pi$; $y(0)=0$, $y(\pi)=0$.

В задачах **589—600** решить уравнения Эйлера (см. [1], гл. VI, § 1, п. 4).

589. $x^2y''-4xy'+6y=0$. 590. $x^2y''-xy'-3y=0$.
591. $x^3y'''+xy'-y=0$. 592. $x^2y'''=2y'$.
593. $x^2y''-xy'+y=8x^3$. 594. $x^2y''+xy'+4y=10x$.
595. $x^3y''-2xy=6\ln x$. 596. $x^2y''-3xy'+5y=3x^2$.
597. $x^2y''-6y=5x^3+8x^2$. 598. $x^2y''-2y=\sin\ln x$.
599. $(x-2)^2y''-3(x-2)y'+4y=x$.
600. $(2x+3)^3y'''+3(2x+3)y'-6y=0$.

§ 12. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Задачи **601—655** решаются с помощью методов общей теории линейных дифференциальных уравнений (см. [1], гл. V, §§ 2, 3). К остальным задачам этого параграфа даны указания или ссылки на литературу.

2. Если известно частное решение y_1 линейного однородного уравнения n-го порядка, то порядок уравнения можно понизить, сохраняя линейность уравнения. Для этого в уравнение надо подставить $y=y_1z$ и затем понизить порядок заменой $z'=u$.

Чтобы найти общее решение линейного однородного уравнения второго порядка

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0,$$

у которого известно одно частное решение y_1, можно понизить порядок уравнения указанным выше способом. Однако удобнее воспользоваться формулой Остроградского—Лиувилля:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=Ce^{-\int p(x)\,dx},\quad p(x)=\frac{a_1(x)}{a_0(x)},$$

где y_1 и y_2 — любые два решения данного уравнения.

Пример. Пусть известно частное решение $y_1=x$ уравнения

$$(x^2+1)y''-2xy'+2y=0. \tag{1}$$

По формуле Остроградского—Лиувилля получим

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=Ce^{-\int\left(\frac{-2x}{x^2+1}\right)dx};\quad y_1y_2'-y_1'y_2=C(x^2+1).$$

Так как функция y_1 известна, то мы получили линейное уравнение первого порядка относительно y_2. Проще всего оно решается следующим способом. Разделив обе части уравнения на y_1^2, получим слева производную от дроби $\dfrac{y_2}{y_1}$

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'=\frac{y_1y_2'-y_1'y_2}{y_1^2}=\frac{C(x^2+1)}{y_1^2}.$$

Так как $y_1=x$, то

$$\frac{y_2}{y_1}=\int C\cdot\frac{x^2+1}{x^2}\,dx+C_2=C\left(x-\frac{1}{x}\right)+C_2;$$

$$y_2=C(x^2-1)+C_2x.$$

Это — общее решение уравнения (1).

3. Общего метода для отыскания частного решения линейного уравнения второго порядка не существует. В некоторых случаях решение удается найти путем подбора.

Пример. Найти частное решение уравнения

$$(1-2x^2)y''+2y'+4y=0, \tag{2}$$

являющееся **алгебраическим** многочленом (если такое решение существует).

Сначала найдем степень многочлена. Подставляя $y=x^n+\ldots$ в уравнение (2) и выписывая только члены с самой старшей степенью буквы x, получим:

$$-2x^2\cdot n(n-1)x^{n-2}+\ldots+4x^n+\ldots=0.$$

Приравнивая нулю коэффициент при старшей степени x, получим:

$$-2n(n-1)+4=0;\quad n^2-n-2=0.$$

Отсюда $n_1=2$; корень $n_2=-1$ не годен (степень многочлена — целое положительное число). Итак, многочлен может быть только второй степени. Ищем его в виде $y=x^2+ax+b$. Подставляя в уравнение (2), получим $(4a+4)x+2+2a+4b=0$. Следовательно, $4a+4=0$, $2+2a+4b=0$. Отсюда $a=-1$, $b=0$. Итак, многочлен $y=x^2-x$ является частным решением.

В задачах **601—622** исследовать, являются ли данные функции линейно зависимыми. В каждой задаче функции рассматриваются в той области, в которой они все определены.

601. $x+2,\ x-2.$ **602.** $6x+9,\ 8x+12.$

603. $\sin x,\ \cos x.$ **604.** $1,\ x,\ x^2.$

605. $4-x,\ 2x+3,\ 6x+8.$

606. $x^2+2x,\ 3x^2-1,\ x+4.$

607. $x^2-x+3,\ 2x^2+x,\ 2x-4.$

608. $e^x,\ e^{2x},\ e^{3x}.$ **609.** $x,\ e^x,\ xe^x.$

610. $1,\ \sin^2 x,\ \cos 2x.$ **611.** $\operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x,\ 2+e^x.$

612. $\ln(x^2),\ \ln 3x,\ 7.$ **613.** $x,\ 0,\ e^x.$

614. $\operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x,\ 2e^x-1,\ 3e^x+5.$

615. $2^x,\ 3^x,\ 6^x.$ **616.** $\sin x,\ \cos x,\ \sin 2x.$

617. $\sin x,\ \sin(x+2),\ \cos(x-5).$

618. $\sqrt{x},\ \sqrt{x+1},\ \sqrt{x+2}.$

619. $\operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arcctg} x,\ 1.$ **620.** $x^2,\ x|x|.$

621. $x,\ |x|,\ 2x+\sqrt{4x^2}.$ **622.** $x,\ x^3,\ |x^3|.$

623*. Пусть на интервале (a, b) функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы, имеют непрерывные производные и

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Доказать, что на этом интервале найдется такая точка x_0, что $y_1(x_0)=y_2(x_0)=y_1'(x_0)=y_2'(x_0)=0.$

В каждой из задач **624—630** составить линейное однородное дифференциальное уравнение (возможно меньшего порядка), имеющее данные частные решения.

624. $1,\ \cos x.$ **625.** $x,\ e^x.$

626. $3x,\ x-2,\ e^x+1.$

627. $x^2-3x,\ 2x^2+9,\ 2x+3.$

628. $e^x,\ \operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x,$ **629.** $x,\ x^2,\ e^x.$

630. $x,\ x^3,\ |x^3|.$

В задачах **631—651** найти общие решения данных уравнений, зная их частные решения. В тех задачах, где частное решение не дано, можно искать его путем подбора, например, в виде показательной функции $y_1=e^{ax}$ или алгебраического многочлена $y_1=x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+\ldots$

631. $(2x+1)y''+4xy'-4y=0.$

632. $x^2(x+1)y''-2y=0;\quad y_1=1+\frac{1}{x}.$

633. $xy''-(2x+1)y'+(x+1)y=0.$

634. $xy''+2y'-xy=0;\ y_1=\frac{e^x}{x}.$

635. $y''-2(1+\operatorname{tg}^2 x)y=0;\ y_1=\operatorname{tg} x.$

636. $x(x-1)y''-xy'+y=0.$

637. $(e^x+1)y''-2y'-e^xy=0;\ y_1=e^x-1.$

638. $x^2y''\ln x-xy'+y=0.$

639. $y''-y'\operatorname{tg} x+2y=0;\ y_1=\sin x.$

640. $(x^2+1)y''+5xy'+4y=0;\quad y_1=\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$

641. $xy''-(x+1)y'-2(x-1)y=0.$

642. $y''+4xy'+(4x^2+2)y=0;\quad y_1=e^{ax^2}.$

643. $xy''-(2x+1)y'+2y=0.$

644. $x(2x+1)y''+2(x+1)y'-2y=0.$

645. $x(x+4)y''-(2x+4)y'+2y=0.$

646. $x(x^2+6)y''-4(x^2+3)y'+6xy=0.$

647. $(x^2+1)y''-2y=0.$

648. $2x(x+2)y''+(2-x)y'+y=0.$

649. $xy'''-y''-xy'+y=0;\ y_1=x,\ y_2=e^x.$

650. $x^2(2x-1)y'''+(4x-3)xy''-2xy'+2y=0;$

$$y_1=x,\ y_2=\frac{1}{x}.$$

651. $(x^2-2x+3)y'''-(x^2+1)y''+2xy'-2y=0;$
$$y_1=x,\ y_2=e^x.$$

Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения является многочленом.

652. $(x+1)xy''+(x+2)y'-y=x+\frac{1}{x}.$

653. $(2x+1)y''+(2x-1)y'-2y=x^2+x.$

Зная два частных решения линейного неоднородного уравнения второго порядка, найти его общее решение.

654. $(x^2-1)y''+4xy'+2y=6x;$
$$y_1=x,\ y_2=\frac{x^2+x+1}{x+1}.$$

655. $(3x^3+x)y''+2y'-6xy=4-12x^2;$
$$y_1=2x,\ y_2=(x+1)^2.$$

В задачах **656—660** линейной заменой искомой функции $y=a(x)z$ уничтожить член с первой производной в данных уравнениях.

656. $x^2y''-2xy'+(x^2+2)y=0.$

657. $x^2y''-4xy'+(6-x^2)y=0.$

658. $(1+x^2)y''+4xy'+2y=0.$

659. $x^2y''+2x^2y'+(x^2-2)y=0.$

660. $xy''+y'+xy=0.$

В задачах **661—665** заменой независимого переменного $t=\varphi(x)$ уничтожить член с первой производной в данных уравнениях [1]).

661. $xy''-y'-4x^3y=0.$

662. $(1+x^2)y''+xy'+y=0.$

663. $x^2(1-x^2)y''+2(x-x^3)y'-2y=0.$

664. $y''-y'+e^{4x}y=0.$

665. $2xy''+y'+xy=0.$

666. Найти расстояние между двумя соседними нулями любого (не тождественно равного нулю) решения уравнения $y''+my=0$, где $m=\text{const}>0$. Сколько нулей может содержаться на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$?

В задачах **667—670**, используя результат предыдущей задачи и теорему сравнения (см. [1], гл. VI, § 2, п. 3), оценить сверху и снизу расстояние между двумя соседними нулями любого (не тождественно равного нулю) решения следующих уравнений на заданном отрезке.

667. $y''+2xy=0,\ 20\leqslant x\leqslant 45.$

668. $xy''+y=0,\ 25\leqslant x\leqslant 100.$

669. $y''-2xy'+(x+1)^2y=0,\ 4\leqslant x\leqslant 19.$

670. $y''-2e^xy'+e^{2x}y=0,\qquad 2\leqslant x\leqslant 6.$

671*. Оценить сверху и снизу количество нулей любого (не нулевого) решения уравнения $y''+xy=0$ на отрезке $-25\leqslant x\leqslant 25.$

672. Пусть $x_1,\ x_2,\ \ldots$ — расположенные в порядке возрастания последовательные нули решения уравнения $y''+q(x)y=0$, где $q(x)>0$; при $x_1\leqslant x<\infty$ функция $q(x)$ непрерывна и возрастает. Доказать, что $x_{n+1}-x_n<x_n-x_{n-1}$ (т. е. расстояние между соседними нулями убывает).

673. В предыдущей задаче обозначим через c конечный или бесконечный предел функции $q(x)$ при $x\to\infty$. Доказать, что
$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=\frac{\pi}{\sqrt{c}}.$$

674*. Пусть функции $y(x)$ и $z(x)$ удовлетворяют уравнениям $y''+q(x)y=0$ и $z''+Q(x)z=0$, положительны соответственно на промежутках $(x_1,\ x_2)$ и $(x_1,\ x_2^*)$ и на их концах обращаются в нуль; пусть $Q(x)>q(x)>0$. Доказать, что если $z'(x_1)=y'(x_1)$, то $z(x)<y(x)$ при $x_1<x\leqslant x_2^*$.

675*. Пусть выполнены условия задачи **672** и пусть
$$b_n=\max_{x_n<x<x_{n+1}}|y(x)|.$$
Доказать, что $b_1>b_2>b_3>\ldots$

676*. Пусть в задаче **673** предел c конечный. Доказать, что $b_n\to B>0$ при $n\to\infty$ (в обозначениях задачи **675**).

---

677. Заменой независимого переменного $t=\varphi(x)$ привести уравнение $\frac{d^2y}{dx^2}\pm\frac{y}{(\psi(x))^4}=0$ к виду $\frac{d^2y}{dt^2}+b(t)\frac{dy}{dt}\pm$

---

1) В задачах 661—665 требуемая замена переменных определяется неоднозначно, поэтому при решении этих задач могут получиться ответы, не совпадающие с приведенными, но сводящиеся к ним с помощью замены $t=at_1+b$ при любых a и b.

$\pm y=0$, затем избавиться от первой производной заменой $y=a(t)u$[1]).

678*. Пусть $|f(t)|\leqslant\frac{c}{t^{1+\alpha}}$, где $\alpha>0$. Доказать, что уравнение $u''+(1+f(t))u=0$ имеет два таких решения, что при $t\to+\infty$

$$u_1(t)=\cos t+O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right),\quad u_2(t)=\sin t+O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right).$$

Указание. Перенести $f(t)u$ в правую часть, обозначить через $F(t)$ и применить метод вариации постоянных. В получающемся интеграле положить один из пределов равным $+\infty$. Применить метод последовательных приближений, взяв за нулевое приближение $u=\cos t$ (или $\sin t$).

679*. Пусть $|f(t)|\leqslant\frac{c}{t^{1+\alpha}}$. Доказать, что уравнение $u''-(1-f(t))u=0$ имеет два таких решения, что при $t\to+\infty$

$$u_1(t)=e^t\left(1+O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)\right),\quad u_2(t)=e^{-t}\left(1+O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)\right).$$

В задачах **680—688** исследовать асимптотическое поведение при $x\to+\infty$ решений данных уравнений, пользуясь преобразованием Лиувилля[2]) и утверждениями, сформулированными в задачах **678** и **679**.

680. $y''+x^2y=0$. **681.** $y''+e^{2x}y=0$.
682. $xy''-y=0$. **683.** $y''-xy=0$.
684. $xy''+2y'+y=0$.
685. $y''-2(x-1)y'+x^2y=0$.
686*. $y''+(x^4+1)y=0$. **687*.** $(x^2+1)y''-y=0$.
688*. $x^2y''+y\ln^2 x=0$.

---

[1]) Это преобразование называется преобразованием Лиувилля. Во многих случаях оно позволяет привести уравнение $y''+q(x)y=0$ к уравнению аналогичного вида, но с «почти постоянным» (слабо меняющимся на интервале (t_0,∞)) коэффициентом при y. Это облегчает исследование асимптотического поведения решения при $x\to\infty$.

[2]) См. примечание к задаче **677**.

В задачах **689—690** получить более точное асимптотическое представление решений данных уравнений, применяя два раза преобразование Лиувилля.

689. $y''-4x^2y=0$. **690.** $xy''+y=0$.

§ 13. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ

1. Если функция $f(x,y)$ в окрестности точки $(x_0,\ y_0)$ аналитическая, т. е. разлагается в ряд по степеням $(x-x_0)$ и $(y-y_0)$, то решение уравнения $y'=f(x,y)$ с начальным условием $y(x_0)=y_0$ тоже является аналитической функцией, т. е. разлагается в степенной ряд в окрестности точки x_0 (см. [2], § 18 и [1], гл. II, § 1, п. 6). Аналогичное утверждение справедливо для уравнения $y^{(n)}=f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})$ с начальными условиями $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$.

Пример. Найти в виде ряда решение уравнения $y''=xy^2-y'$ с начальными условиями $y(0)=2$, $y'(0)=1$.

Ищем решение в виде ряда

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots=2+x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots,\tag{1}$$

так как из начальных условий следует, что $a_0=2$, $a_1=1$. Подставляя ряд в дифференциальное уравнение, получим

$$2a_2+6a_3x+12a_4x^2+\ldots=\\=x(2+x+a_2x^2+\ldots)^2-1-2a_2x-3a_3x^2-\ldots$$

Представляя правую часть в виде степенного ряда и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях уравнения, получим $2a_2=-1$, $6a_3=4-2a_2$, $12a_4=4-3a_3$, ... Отсюда найдем $a_2=-\frac{1}{2}$, $a_3=\frac{5}{6}$, $a_4=\frac{1}{8}$, ... Следовательно,

$$y=2+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{6}x^3+\frac{1}{8}x^4+\ldots$$

2. Для уравнения

$$p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=0,\tag{2}$$

у которого $p_0(x_0)=0$, т. е. коэффициент при старшей производной обращается в нуль в точке x_0, решений в виде степенного ряда может не существовать. В этом случае могут существовать решения в виде обобщенных степенных рядов

$$a_0(x-x_0)^r+a_1(x-x_0)^{r+1}+a_2(x-x_0)^{r+2}+\ldots,\tag{3}$$

где число r не обязательно целое (см. [1], гл. VI, § 2, п. 2). Чтобы их найти, надо подставить ряд (3) в уравнение (2) и, приравняв коэффициенты при наименьшей степени $(x-x_0)$, найти возможные значения показателя r, а затем для каждого из этих значений r определить коэффициенты a_i.

В каждой из задач **691—697** найти в виде степенного ряда решение, удовлетворяющее данным начальным условиям. Вычислить несколько первых коэффициентов ряда (до коэффициента при x^4 включительно).

691. $y'=y^2-x$; $y(0)=1$. **692.** $y'=x+\frac{1}{y}$; $y(0)=1$.

693. $y'=y+xe^y$; $y(0)=0$.

694. $y'=2x+\cos y$; $y(0)=0$.

695. $y'=x^2+y^3$; $y(1)=1$.

696. $y''=xy'-y^2$; $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

697. $y''=y'^2+xy$; $y(0)=4$, $y'(0)=-2$.

698*. Построив мажорирующее уравнение (см. [2], § 18), оценить снизу радиус сходимости степенного ряда, представляющего решение уравнения $y'=y^2-x$ с начальным условием $y(0)=1$.

699*. Оценить, с какой точностью можно получить при $|x|\leqslant 0{,}2$ решение уравнения $y'=e^y-x^2y$ с начальным условием $y(0)=0$, если в степенном ряде, представляющем решение, взять только четыре члена (до a_4x^4 включительно).

В задачах **700—709** найти линейно независимые решения каждого из данных уравнений в виде степенных рядов. В тех случаях, когда это легко сделать, сумму полученного ряда выразить с помощью элементарных функций.

700. $y''-x^2y=0$. **701.** $y''-xy'-2y=0$.

702. $(1-x^2)y''-4xy'-2y=0$.

703. $(x^2+1)y''+5xy'+3y=0$.

704. $(1-x)y''-2y'+y=0$.

705. $(x^2-x+1)y''+(4x-2)y'+2y=0$.

706. $y''-xy'+xy=0$. **707.** $y''+y\sin x=0$.

708. $xy''+y\ln(1-x)=0$.

709. $y'''-xy''+(x-2)y'+y=0$.

В задачах **710—716** найти те решения данных уравнений, которые выражаются степенными (или обобщенными степенными) рядами.

710. $xy''+2y'+xy=0$.

711. $2x^2y''+(3x-2x^2)y'-(x+1)y=0$.

712. $9x^2y''-(x^2-2)y=0$.

713. $x^2y''-x^2y'+(x-2)y=0$.

714. $x^2y''+2xy'-(x^2+2x+2)y=0$.

715. $xy''-xy'-y=0$. **716.** $xy''+y'-xy=0$.

717. Найти с точностью до $O(x^5)$ при $x\to 0$ решение уравнения $xy''+y'-xy=0$, линейно независимое с решением, указанным в ответе задачи **716.**

В задачах **718—720** указать, имеют ли данные уравнения решение в виде степенного ряда (или обобщенного степенного ряда).

718. $x^2y''+xy'-(x+2)y=0$.

719. $x^2y''+xy'+(1-x)y=0$.

720. $x^2y'+(x-1)y=-1$.

В задачах **721—722** найти в виде тригонометрических рядов (см. [1], гл. VI, § 1, п. 3) периодические решения данных уравнений.

721. $y''+y'+y=|\sin x|$.

722. $y'''-y'-y=\frac{2\sin x}{5-4\cos x}$.

Указание. Разложение в ряд Фурье правой части уравнения 722 имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-n}\sin nx$.

В задачах **723—725** найти 2—3 члена разложения[1]) решения в ряд по степеням параметра μ.

723. $y'=4\mu(x+1)-y^2$; $y(0)=1$.

724. $y'=\frac{2}{y}-5\mu x$; $y(1)=2$.

725. $xy'=\mu x^2+\ln y$; $y(1)=1$.

§ 14. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Линейные системы уравнений с постоянными коэффициентами можно решить или путем исключения неизвестных или с помощью характеристического уравнения в виде детерминанта (см. [1], гл. VII, § 2, п. 4; [3], § 11, 14). При решении неоднородной системы

---

[1]) Возможность разложения решения в ряд вида

$$y=y_0(x)+\mu y_1(x)+\mu^2y_2(x)+\dots$$

вытекает из теоремы об аналитической зависимости решения от параметра ([4], гл. I, § 6, стр. 51).

уравнений вторым из указанных способов частное решение можно искать методом вариации постоянных (см. [1], гл. VII, § 2, п. 3; [3], § 17), а в том случае, когда правая часть системы имеет специальный вид (многочлены от x, показательные функции, синусы и косинусы, или суммы и произведения этих функций), частное решение можно искать также методом неопределенных коэффициентов, исходя из вида правой части системы (см. [2], § 49; [3], § 12).

В задачах **726—752** решить данные системы уравнений $\left(\dot{x}\right.$ означает $\frac{dx}{dt}$, и т. д.; для облегчения работы в некоторых задачах указаны корни характеристического уравнения$\left.\right)$.

726. $\begin{cases} \dot{x}=2x+y, \\ \dot{y}=3x+4y. \end{cases}$

727. $\begin{cases} \dot{x}=x-y, \\ \dot{y}=y-4x. \end{cases}$

728. $\begin{cases} \dot{x}+x-8y=0. \\ \dot{y}-x-y=0. \end{cases}$

729. $\begin{cases} \dot{x}=x+y, \\ \dot{y}=3y-2x. \end{cases}$

730. $\begin{cases} \dot{x}=x-3y, \\ \dot{y}=3x+y. \end{cases}$

731. $\begin{cases} \dot{x}+x+5y=0. \\ \dot{y}-x-y=0. \end{cases}$

732. $\begin{cases} \dot{x}=2x+y, \\ \dot{y}=4y-x. \end{cases}$

733. $\begin{cases} \dot{x}=3x-y, \\ \dot{y}=4x-y. \end{cases}$

734. $\begin{cases} \dot{x}=2y-3x, \\ \dot{y}=y-2x. \end{cases}$

735. $\begin{cases} \dot{x}-5x-3y=0, \\ \dot{y}+3x+y=0. \end{cases}$

736. $\begin{cases} \dot{x}=x+z-y, \\ \dot{y}=x+y-z, \\ \dot{z}=2x-y \end{cases}$ $(\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=-1).$

737. $\begin{cases} \dot{x}=x-2y-z, \\ \dot{y}=y-x+z, \\ \dot{z}=x-z \end{cases}$ $(\lambda_1=0,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=-1).$

738. $\begin{cases} \dot{x}=2x-y+z, \\ \dot{y}=x+2y-z, \\ \dot{z}=x-y+2z \end{cases}$ $(\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=3).$

739. $\begin{cases} \dot{x}=3x-y+z, \\ \dot{y}=x+y+z, \\ \dot{z}=4x-y+4z \end{cases}$ $(\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=5).$

740. $\begin{cases} \dot{x}=4y-2z-3x, \\ \dot{y}=z+x, \\ \dot{z}=6x-6y+5z \end{cases}$ $(\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=-1).$

741. $\begin{cases} \dot{x}=x-y-z, \\ \dot{y}=x+y, \\ \dot{z}=3x+z \end{cases}$ $(\lambda_1=1,\ \lambda_{2,3}=1\pm 2i).$

742. $\begin{cases} \dot{x}=2x+y, \\ \dot{y}=x+3y-z, \\ \dot{z}=2y+3z-x \end{cases}$ $(\lambda_1=2,\ \lambda_{2,3}=3\pm i).$

743. $\begin{cases} \dot{x}=2x+2z-y, \\ \dot{y}=x+2z, \\ \dot{z}=y-2x-z \end{cases}$ $(\lambda_1=1,\ \lambda_{2,3}=\pm i).$

744. $\begin{cases} \dot{x}=4x-y-z, \\ \dot{y}=x+2y-z, \\ \dot{z}=x-y+2z \end{cases}$ $(\lambda_1=2,\ \lambda_2=\lambda_3=3).$

745. $\begin{cases} \dot{x}=2x-y-z, \\ \dot{y}=3x-2y-3z, \\ \dot{z}=2z-x+y \end{cases}$ $(\lambda_1=0,\ \lambda_2=\lambda_3=1).$

746. $\begin{cases} \dot{x}=y-2x-2z, \\ \dot{y}=x-2y+2z, \\ \dot{z}=3x-3y+5z \end{cases}$ $(\lambda_1=3,\ \lambda_2=\lambda_3=-1).$

747. $\begin{cases} \dot{x}=3x-2y-z, \\ \dot{y}=3x-4y-3z, \\ \dot{z}=2x-4y \end{cases}$ $(\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=-5).$

748. $\begin{cases} \dot{x}=x-y+z, \\ \dot{y}=x+y-z, \\ \dot{z}=2z-y \end{cases}$ $(\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=2).$

749. $\begin{cases} \dot{x}=y-2z-x, \\ \dot{y}=4x+y, \\ \dot{z}=2x+y-z \end{cases}$ $(\lambda_1=1,\ \lambda_2=\lambda_3=-1)$

750. $\begin{cases} \dot{x}=2x+y, \\ \dot{y}=2y+4z, \\ \dot{z}=x-z \end{cases}$ $(\lambda_1=\lambda_2=0,\ \lambda_3=3).$

751. $\begin{cases} \dot{x}=2x-y-z, \\ \dot{y}=2x-y-2z, \\ \dot{z}=2z-x+y \end{cases}$ $(\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1).$

752. $\begin{cases} \dot{x}=4x-y, \\ \dot{y}=3x+y-z, \\ \dot{z}=x+z \end{cases}$ $(\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2).$

В задачах 753—765 решить системы, не приведенные к нормальному виду.

753. $\begin{cases} \ddot{x} = 2x - 3y, \\ \ddot{y} = x - 2y. \end{cases}$

754. $\begin{cases} \ddot{x} = 3x + 4y, \\ \ddot{y} = -x - y. \end{cases}$

755. $\begin{cases} \ddot{x} = 2y, \\ \ddot{y} = -2x. \end{cases}$

756. $\begin{cases} \ddot{x} = 3x - y - z, \\ \ddot{y} = -x + 3y - z, \\ \ddot{z} = -x - y + 3z. \end{cases}$

757. $\begin{cases} 2\dot{x} - 5\dot{y} = 4y - x, \\ 3\dot{x} - 4\dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

758. $\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + \dot{y} - 2y = 0, \\ \dot{x} - \dot{y} + x = 0. \end{cases}$

759. $\begin{cases} \ddot{x} - 2\ddot{y} + \dot{y} + x - 3y = 0, \\ 4\ddot{y} - 2\ddot{x} - \dot{x} - 2x + 5y = 0. \end{cases}$

760. $\begin{cases} \ddot{x} - x + 2\ddot{y} - 2y = 0, \\ \dot{x} - x + \dot{y} + y = 0. \end{cases}$

761. $\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} + 2x = 0, \\ 3\dot{x} + \ddot{y} - 8y = 0. \end{cases}$

762. $\begin{cases} \ddot{x} + 3\ddot{y} - x = 0, \\ \dot{x} + 3\dot{y} - 2y = 0. \end{cases}$

763. $\begin{cases} \ddot{x} + 5\dot{x} + 2\dot{y} + y = 0, \\ 3\ddot{x} + 5x + \dot{y} + 3y = 0. \end{cases}$

764. $\begin{cases} \ddot{x} + 4\dot{x} - 2x - 2\dot{y} - y = 0, \\ \ddot{x} - 4\dot{x} - \ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = 0. \end{cases}$

765. $\begin{cases} 2\ddot{x} + 2\dot{x} + x + 3\ddot{y} + \dot{y} + y = 0, \\ \ddot{x} + 4\dot{x} - x + 3\ddot{y} + 2\dot{y} - y = 0. \end{cases}$

В задачах 766—785 решить линейные неоднородные системы.

766. $\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + t^2. \end{cases}$

767. $\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$

768. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$

769. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y + e^{-2t}, \\ \dot{y} = x - 2y - 3e^{-2t}. \end{cases}$

770. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + y - e^{2t}, \\ \dot{y} = y - 2x. \end{cases}$

771. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x + 1, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$

772. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$

773. $\begin{cases} \dot{x} = x + y + 1 + e^t, \\ \dot{y} = 3x - y. \end{cases}$

774. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = x - 5\sin t. \end{cases}$

775. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y, \\ \dot{y} = x - 3y + 3e^t. \end{cases}$

776. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = y - 2x + 18t. \end{cases}$

777. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 16te^t, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$

778. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y - 8, \\ \dot{y} = 3x + 6y. \end{cases}$

779. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2\sin t. \end{cases}$

780. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y + 5t, \\ \dot{y} = 3x + 2y + 8e^t. \end{cases}$

781. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2e^t. \end{cases}$

782. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + \sin t, \\ \dot{y} = 2x - y - 2\cos t. \end{cases}$

783. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}. \end{cases}$

784. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 8t, \\ \dot{y} = 5x - y. \end{cases}$

785. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 2y - x - 5e^t \sin t. \end{cases}$

В задачах 786—790 данные системы решить методом вариации постоянных.

786. $\begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dot{y} = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$

787. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 4y - 3x + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t} + 1}. \end{cases}$

788. $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1}, \\ \dot{y} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$

789. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + \dfrac{1}{\cos t}, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

790. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - y + 15e^t\sqrt{t}. \end{cases}$

§ 15. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ [1]

791. Исходя из определения устойчивости по Ляпунову, выяснить, устойчиво ли решение уравнения $\frac{dx}{dt}=t-x$ с начальным условием $x(0)=1$.

792. Тот же вопрос для решения системы уравнений

$$\frac{dx}{dt}=4y, \quad \frac{dy}{dt}=-x$$

с начальными условиями $x(0)=0$, $y(0)=0$.

В задачах **793—796** с помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение $x(t)=0$, $y(t)=0$ данных систем.

793. $\begin{cases} \dot{x}=2xy-x+y, \\ \dot{y}=5x^4+y^3+2x-3y. \end{cases}$ **794.** $\begin{cases} \dot{x}=x^2+y^2-2x, \\ \dot{y}=3x^2-x+3y. \end{cases}$

795. $\begin{cases} \dot{x}=e^{x+2y}-\cos 3x, \\ \dot{y}=\sqrt{4+8x}-2e^y. \end{cases}$ **796.** $\begin{cases} \dot{x}=\ln(4y+e^{-3x}), \\ \dot{y}=2y-1+\sqrt[3]{1-6x}. \end{cases}$

В задачах **797—800** для данных систем найти положения равновесия и исследовать их на устойчивость.

797. $\begin{cases} \dot{x}=y-x^2-x, \\ \dot{y}=3x-x^2-y. \end{cases}$ **798.** $\begin{cases} \dot{x}=(x-1)(y-1), \\ \dot{y}=xy-2. \end{cases}$

799. $\begin{cases} \dot{x}=5-x^2-y^2, \\ \dot{y}=1+y^2-x. \end{cases}$ **800.** $\begin{cases} \dot{x}=y, \\ \dot{y}=\sin(x+y). \end{cases}$

801. Исследовать, устойчиво ли решение $x=t$, $y=-t^2$ системы

$$\begin{cases} \dot{x}=\ln(1+2t-2x)+3y+3t^2+1, \\ \dot{y}=x^2-2tx-2x-y. \end{cases}$$

---

[1] С основами теории устойчивости по Ляпунову можно ознакомиться по учебникам: [1], гл. VII, § 6; [3], § 26 или [4], гл. IV, § 1, § 4. Этого достаточно для решения задач **791—805**. О применении функции Ляпунова для исследования устойчивости (задачи **806—810**) см. [3], § 26 или [4], гл. IV, § 3.

802. Выяснить, является ли нулевое решение некоторой системы уравнений устойчивым по Ляпунову, если известно, что общее решение этой системы имеет вид

$$x=\frac{C_1-C_2t}{1+t^2}, \quad y=(C_1t^3+C_2)e^{-t}.$$

803. Траектории системы уравнений $\frac{dx}{dt}=P(x, y)$, $\frac{dy}{dt}=Q(x, y)$, где функции P, P'_x, P'_y, Q, Q'_x, Q'_y непрерывны, изображены на фазовой плоскости (рис. 1). Что можно сказать о поведении решений при $t\to+\infty$? Является ли нулевое решение асимптотически устойчивым? Является ли оно устойчивым по Ляпунову?

804. Доказать, что для устойчивости по Ляпунову нулевого решения уравнения $\frac{dx}{dt}=a(t)x$ (где функция $a(t)$ непрерывна) необходимо и достаточно, чтобы

$$\varlimsup_{t\to+\infty}\int_0^t a(s)\,ds<+\infty.$$

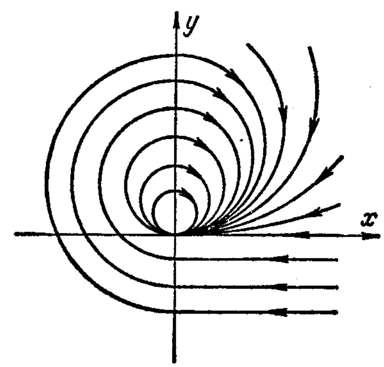


Рис. 1.

805*. Доказать, что если какое-нибудь одно решение линейной системы дифференциальных уравнений устойчиво по Ляпунову, то устойчивы все решения этой системы.

В задачах **806—810** исследовать с помощью функции Ляпунова устойчивость нулевого решения данных систем.

806. $\begin{cases} \dot{x}=x^3-y, \\ \dot{y}=x+y^3. \end{cases}$ **807.** $\begin{cases} \dot{x}=y-x+xy, \\ \dot{y}=x-y-x^2-y^3. \end{cases}$

808. $\begin{cases} \dot{x}=2y^3-x^5, \\ \dot{y}=-x-y^3+y^5. \end{cases}$ **809.** $\begin{cases} \dot{x}=y-3x-x^3, \\ \dot{y}=6x-2y. \end{cases}$

810*. $\begin{cases} \dot{x}=-f_1(x)-f_2(y), \\ \dot{y}=f_3(x)-f_4(y), \end{cases}$

где $\operatorname{sgn} f_i(z)=\operatorname{sgn} z$, $i=1, 2, 3, 4$.

§ 16. ОСОБЫЕ ТОЧКИ

1. Особой точкой системы

$$\frac{dx}{dt}=P(x, y), \quad \frac{dy}{dt}=Q(x, y) \tag{1}$$

или уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \tag{2}$$

где функции P и Q непрерывно дифференцируемы, называется такая точка, в которой $P(x, y)=0$, $Q(x, y)=0$.

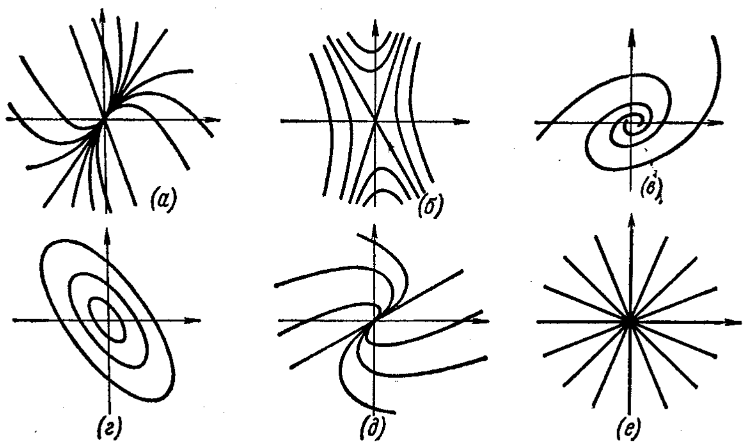


Рис. 2.

2. Для исследования особой точки системы

$$\frac{dx}{dt}=ax+by, \quad \frac{dy}{dt}=cx+dy \tag{3}$$

или уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{cx+dy}{ax+by} \tag{4}$$

надо найти корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{5}$$

Если корни вещественные, различные и одного знака, то особая точка — узел (рис. 2, *а*), если разных знаков — седло (рис. 2, *б*), если корни комплексные с вещественной частью, отличной от нуля, то особая точка — фокус (рис. 2, *в*), если чисто мнимые, — центр

(рис. 2, *г*); если корни равные и ненулевые (т. е. $\lambda_1=\lambda_2\neq 0$), то особая точка может быть вырожденным узлом (рис. 2, *д*) или дикритическим узлом (рис. 2, *е*), причем дикритический узел имеет место только в случае системы $\frac{dx}{dt}=ax$; $\frac{dy}{dt}=ay$ $\left(\text{или уравнения } \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\right)$, а во всех остальных случаях при $\lambda_1=\lambda_2\neq 0$ особая точка является вырожденным узлом.

Если же один или оба корня уравнения (5) равны нулю, то $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=0$ и, следовательно, дробь в правой части уравнения (4) сокращается. Уравнение принимает вид $\frac{dy}{dx}=k$, и решения на плоскости (x, y) изображаются параллельными прямыми.

Чтобы начертить интегральные кривые на плоскости в случае узла, седла и вырожденного узла, надо прежде всего найти те решения, которые изображаются прямыми, проходящими через особую точку (см. ниже пример 1). В случае особой точки типа фокус необходимо определить направление закручивания интегральных кривых (см. ниже пример 2).

Пример 1. Исследовать особую точку уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{2x}. \tag{6}$$

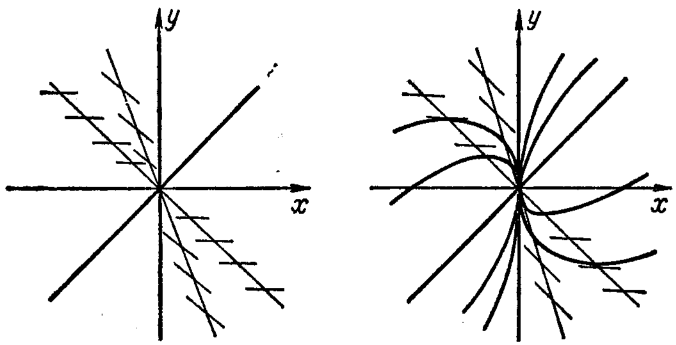
Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0; \quad (2-\lambda)(1-\lambda)=0; \quad \lambda_1=1, \quad \lambda_2=2.$$

Корни вещественные, различные и одного знака. Следовательно, особая точка — узел (того же типа, что на рис. 2, *а*). Чтобы найти прямые, проходящие через особую точку, подставляем $y=kx$ в уравнение (6). Получим

$$k=\frac{x+kx}{2x}; \quad 2k=1+k; \quad k=1.$$

Так как получилась одна прямая, $y=x$, а при вещественных различных корнях их должно быть две, то, следовательно, вторая потеряна. Когда мы искали прямые, проходящие через начало координат, в виде $y=kx$, то мы могли потерять только прямую $x=0$. Записав уравнение (6) в виде $\frac{dx}{dy}=\frac{2x}{x+y}$ или перейдя от уравнения (6) к системе (3), получим, что $x=0$ — решение. Итак, искомые прямые: $y=x$ и $x=0$. Чтобы узнать, какой из них касаются интегральные кривые, построим изоклины $y'=0$ (уравнение этой изоклины $x+y=0$) и $y'=-1$ $\left(\text{уравнение этой изоклины } \frac{x+y}{2x}=-1, \text{ т. е. } y=-3x\right)$. Из полученного чертежа (рис. 3, *а*) видно, что интегральные кривые, попавшие в угол между прямыми $x=0$ и $y=-3x$, не могут выйти из него (потому что в этом угле $y'<0$), следовательно, они должны касаться прямой $x=0$, и узел имеет вид, изображенный на рис. 3, *б*.



(*а*) (*б*)

Рис. 3.

Пример 2. Исследовать особую точку уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4x-3y}{x-2y}. \qquad (7)$$

Находим корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix}=0;\ \lambda^2+2\lambda+5=0;\ \lambda=-1\pm 2i.$$

Особая точка — фокус. Переходим от уравнения (7) к системе

$$\frac{dx}{dt}=x-2y,\quad \frac{dy}{dt}=4x-3y. \qquad (8)$$

Строим в точке (1,0) вектор скорости $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$. В силу (8) он равен $(x-2y,\ 4x-3y)$. В точке $x=1$, $y=0$ получаем вектор (1,4) (рис. 4, *а*). Следовательно, возрастанию t соответствует движение по траекториям против часовой стрелки. Так как вещественная часть корней λ равна $-1<0$, то особая точка асимптотически устойчива, следовательно, при возрастании t решения неограниченно приближаются к особой точке. Итак, при движении против часовой стрелки интегральные кривые приближаются к началу координат (рис. 4, *б*).

3. Для исследования особой точки более общей системы (1) или уравнения (2) надо перенести начало координат в исследуемую особую точку и разложить функции P и Q в окрестности этой точки

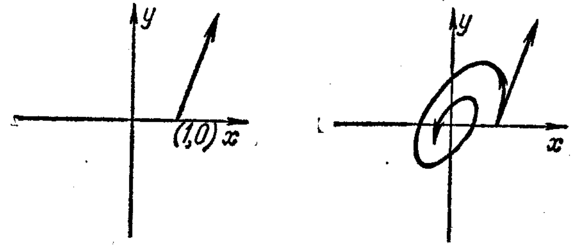
по формуле Тейлора, ограничиваясь членами первого порядка. Тогда система (1) примет вид

$$\frac{dx_1}{dt}=ax_1+by_1+\varphi(x_1, y_1),\quad \frac{dy_1}{dt}=cx_1+dy_1+\psi(x_1, y_1), \qquad (9)$$

где x_1, y_1 — новые координаты (после переноса), a, b, c, d — постоянные. Предположим, что для некоторого $\varepsilon>0$

$$\frac{\varphi(x_1, y_1)}{r^{1+\varepsilon}}\to 0,\quad \frac{\psi(x_1, y_1)}{r^{1+\varepsilon}}\to 0 \text{ при } x_1\to 0,\ y_1\to 0,$$

где $r=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$. Очевидно, это условие выполняется (при любом $\varepsilon<1$), если функции P и Q в исследуемой точке дважды дифференцируемы. Предположим еще, что вещественные части всех корней характеристического уравнения (5) отличны от нуля. Тогда



(*а*) (*б*)

Рис. 4.

особая точка $x_1=0$, $y_1=0$ системы (9) будет того же типа, что особая точка системы (3), получаемой отбрасыванием функций φ и ψ. Далее, угловые коэффициенты направления, по которым интегральные кривые входят в особую точку, для систем (3) и (9) одни и те же (однако прямым $y=kx$ для системы (3) могут соответствовать кривые для системы (9)), а в случае фокуса — направление закручивания интегральных кривых одно и то же.

В том случае, когда для системы (3) особая точка — центр, для системы (9) она может быть фокусом или центром. Для наличия фокуса необходимо и достаточно, чтобы нулевое решение системы (9) было асимптотически устойчиво при $t\to+\infty$ или при $t\to-\infty$. Исследование на устойчивость можно провести с помощью функции Ляпунова. Для наличия центра достаточно (но не необходимо), чтобы интегральные кривые системы (9) имели ось симметрии, проходящую через исследуемую точку. Ось симметрии, очевидно, существует, если уравнение вида (2), к которому можно привести систему (9), не меняется от замены x на $-x$ (или y на $-y$).

В задачах **811—828** исследовать особые точки написанных ниже уравнений и систем. Дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y).

811. $y' = \dfrac{2x+y}{3x+4y}$. **812.** $y' = \dfrac{x-4y}{2y-3x}$.

813. $y' = \dfrac{y-2x}{y}$. **814.** $y' = \dfrac{x+4y}{2x+3y}$.

815. $y' = \dfrac{x-2y}{3x-4y}$. **816.** $y' = \dfrac{2x-y}{x-y}$.

817. $y' = \dfrac{y-2x}{2y-3x}$. **818.** $y' = \dfrac{4y-2x}{x+y}$.

819. $y' = \dfrac{y}{x}$. **820.** $y' = \dfrac{4x-y}{3x-2y}$.

821. $\begin{cases} \dot{x} = 3x, \\ \dot{y} = 2x+y. \end{cases}$ **822.** $\begin{cases} \dot{x} = x+2y, \\ \dot{y} = 5y-2x. \end{cases}$

823. $\begin{cases} \dot{x} = x+3y, \\ \dot{y} = -6x-5y. \end{cases}$ **824.** $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = 2x-y. \end{cases}$

825. $\begin{cases} \dot{x} = -2x-5y, \\ \dot{y} = 2x+2y. \end{cases}$ **826.** $\begin{cases} \dot{x} = 3x+y, \\ \dot{y} = y-x. \end{cases}$

827. $\begin{cases} \dot{x} = 3x-2y, \\ \dot{y} = 4y-6x. \end{cases}$ **828.** $\begin{cases} \dot{x} = y-2x, \\ \dot{y} = 2y-4x. \end{cases}$

В задачах **829—832** найти и исследовать особые точки данных уравнений и систем.

829. $y' = \dfrac{2y-x}{3x+6}$. **830.** $y' = \dfrac{2x+y}{x-2y-5}$.

831. $\begin{cases} \dot{x} = 2x-y, \\ \dot{y} = x-3. \end{cases}$ **832.** $\begin{cases} \dot{x} = x+y-1. \\ \dot{y} = x-y-3. \end{cases}$

В задачах **833—842** найти и исследовать особые точки и дать чертеж расположения интегральных кривых данных уравнений.

833. $y' = \dfrac{6x-y^2+1}{2x+y^2-1}$. **834.** $y' = \dfrac{2y-2}{4y^2-x^2}$.

835. $y' = \dfrac{4y^2-x^2}{2xy-4y-8}$. **836.** $y' = \dfrac{xy}{4-4x-2y}$.

837. $y' = \dfrac{2y}{x^2-y^2-1}$. **838.** $y' = \dfrac{2x}{1-x^2-y^2}$.

839. $y' = \dfrac{2x(x-y)}{2+y-x^2}$. **840.** $y' = \dfrac{2xy}{1-x^2-y^2}$.

841. $y' = \dfrac{y^2-x^2}{2(x-1)(y-2)}$. **842.** $y' = \dfrac{x(2y-x+5)}{x^2+y^2-6x-8y}$.

Для уравнений **843—847** дать чертеж расположения интегральных кривых в окрестности начала координат.

Указание. В задачах 843—847 особые точки не принадлежат к рассмотренным в начале § 16 типам. Для их исследования можно построить несколько изоклин. Затем надо выяснить, с каких сторон интегральные кривые входят в особую точку.

843*. $y' = \dfrac{xy}{x+y}$. **844*.** $y' = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y}$.

845*. $y' = \dfrac{2xy}{y+x^2}$. **846*.** $y' = \dfrac{xy}{y-x^2}$.

847*. $y' = \dfrac{y^2}{y+x^2}$.

848. Доказать, что если особая точка уравнения

$$(ax+by)\,dx+(mx+ny)\,dy=0$$

является центром, то это уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Обратное неверно.

849*. Доказать, что если уравнение предыдущей задачи не является уравнением в полных дифференциалах, но имеет интегрирующий множитель, непрерывный в окрестности начала координат, то особая точка — седло (если $an \neq bm$).

850*. Пусть в уравнении

$$y' = \frac{ax+by+p(x, y)}{cx+dy+q(x, y)} \qquad (1)$$

функции p и q определены и непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки (0, 0), а в самой точке (0, 0)

$$p = p'_x = p'_y = q = q'_x = q'_y = 0.$$

Доказать, что если уравнение (1) не меняется от замены y на $-y$, а корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} c-\lambda & d \\ a & b-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

чисто мнимы, то особая точка (0, 0) — центр.